ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **82**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη:Συστήματα **07/10/2012**

Θέμα 1^o:

Α. i. Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2x2) ;

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία .Πως ονομάζεται αυτή η εξίσωση ;

iii. Πως λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα 2x2 ή ένα μη γραμμικό σύστημα γραφικά και τι συμπεραίνουμε από τη γραφική επίλυση;

(3x5=15μον.)

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις. Σε περίπτωση λανθασμένης αιτιολογήστε .

i. Το σύστημα $\left.\begin{aligned}\alpha x+\beta y=0\\ \kappa x+\lambda y=0\end{aligned}\right\}$ έχει πάντα λύση . **Σ** **Λ**

ii. Το σύστημα $\left.\begin{aligned}3x-\beta y=0\\ \beta x+3y=\gamma\end{aligned}\right\}$ είναι αδύνατο . **Σ** **Λ**

iii. Αν το σύστημα $\left.\begin{aligned}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{aligned}\right\}$ έχει άπειρες λύσεις

τότε D=0. **Σ** **Λ**

iv. Αν το σύστημα $\left.\begin{aligned}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{aligned}\right\}$ έχει δύο λύσεις

τότε $D\neq 0$ **.** **Σ** **Λ**

v. Η ευθεία x+y=5 και η υπερβολή $x\cdot y=6$ δεν έχουν κοινά σημεία. **Σ** **Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Να λύσετε το σύστημα :

$$\left.\begin{aligned}x-2(x-y)=3-(2x-y)\\ y-x(1-2y)=1+2y(x-1)\end{aligned}\right\}$$

(7 μον.)

Β. Αν το σύστημα $\left.\begin{matrix}-3x+2y=\alpha\\6x-4y=\kappa\alpha\end{matrix}\right\},\quad \kappa,\alpha\in\mathbb{R}^*$ έχει άπειρες λύσεις να βρείτε τι τιμή παίρνει το κ. **(8 μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}x+y-z=0\\2x-y+z=0\\37x-8y+8z=0\end{matrix}\right\}$

(10 μον.)

Θέμα 3^o:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}x+y=2\\y+\omega=-8\\\omega+x=4\end{matrix}\right\}$

(8 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}x+y=4\\x\cdot y=3\end{matrix}\right\}$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(7 μον.)**

Γ. Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά απέχουν 18 cm .Αν τα εμβαδά των δύο κύκλων διαφέρουν κατά 72π cm^2 , να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων . **(10 μον.)**

Θέμα 4^o:

Α. Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix}x+\lambda y=\lambda\\-x+\lambda^2y=-\lambda^3\end{matrix}\right\},\quad \lambda\in\mathbb{R}$

(10 μον.)

Β. Έστω ότι το σύστημα $\left.\begin{matrix}(\lambda-1)x+y=1\\x+y=\lambda-1\end{matrix}\right\}$ έχει μοναδική λύση την (x_0,y_0)

i. Να βρείτε τις τιμές του λ .

ii. Αν $2x_0^2+y_0^2=6$, να βρείτε το λ .

(2x7,5=15 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο:

Α.i. Όταν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις αx+βy=γ και $\alpha'x+\beta'y=\gamma'$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις αυτών , τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ή , πιο σύντομα , ένα γραμμικό σύστημα 2x2 και γράφουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{array}\right\}$$

ii. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

$\rightarrow$ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

$\rightarrow$ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\frac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\alpha}$.

iii. Για να λύσουμε ένα σύστημα γραφικά , κατασκευάζουμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων και στη συνέχεια σχηματίζουμε τις γραμμές .Βρίσκουμε τα σημεία στα οποία αυτές τέμνονται , κι αυτά αποτελούν τις λύσεις του συστήματος .

Β. i. Σ. Είναι ομογενές σύστημα , άρα έχει πάντα λύση τη μηδενική.

ii. Λ. Είναι $D=\begin{vmatrix}3 & -\beta\\ \beta & 3\end{vmatrix}=9+\beta^2\neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

iii. Σ

iv. Λ. Εφόσον είναι γραμμικό σύστημα 2Χ2 και έχει δύο λύσεις , έπεται ότι θα έχει άπειρες λύσεις .Άρα D=0 .

v. Λ. Το (x,y)=(2,3) επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις .

Θέμα 2ο:

Α. $\left.\begin{array}{l} x-2(x-y)=3-(2x-y)\\ y-x(1-2y)=1+2y(x-1)\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x-2x+2y=3-2x+y\\ y-x+2xy=1+2yx-2y\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x+y=3\\ -x+3y=1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l} 4y=4\\ x+y=3\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} y=1\\ x=2\end{pmatrix}$ άρα (x,y)=(2,1)

Β. $\left.\begin{array}{l} -3x+2y=\alpha\\ 6x-4y=\kappa\alpha\end{array}\right\}\underset{:(-2)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l} -3x+2y=\alpha\\ -3x+2y=-\dfrac{\kappa\alpha}{2}\end{array}\right\}$

Για να έχει άπειρες λύσεις το σύστημα πρέπει :

$\alpha=-\dfrac{\kappa\alpha}{2}\overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow}2=-\kappa\Leftrightarrow\kappa=-2$

Γ. $\begin{array}{ll} x+y-z=0 & (1)\\ 2x-y+z=0 & (2)\\ 37x-8y+8z=0 & (3)\end{array}$

Προσθέτουμε την (1) και την (2) οπότε :3x=0$\Leftrightarrow$x=0

Για x=0 οι (2) , (3) γίνονται :

$\left.\begin{array}{l} -y+z=0\\ -8y+8z=0\end{array}\right\}\underset{:8}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l} -y+z=0\\ -y+z=0\end{array}\right\}$ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (0,y,y) , $y\in R$

Θέμα 3ο:

Α. $\left.\begin{array}{ll} x+y=2 & (1)\\ y+\omega=-8 & (2)\\ \omega+x=4 & (3)\end{array}\right\}$

Προσθέτουμε τις (1) ,(2,),(3) κατά μέλη και έχουμε **:**

$2x+2y+2\omega=-2\Leftrightarrow x+y+\omega=-1$ (4)

Αφαιρούμε από την (4) τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}(4)-(1):\ \text{x+y+ω-(x+y)=-1-2}\\(4)-(2):\ \text{x+y+ω-(y+ω)=-1+8}\\(4)-(3):\ \text{x+y+ω-(ω+x)=-1-4}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\omega=-3\\x=7\\y=-5\end{array}$$

άρα (x,y,ω)=(7,-5,-3)

Β. $\left.\begin{array}{l}x+y=4\\x\cdot y=3\end{array}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 4 και γινόμενο 3. Επομένως , από τους τύπους του vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-4\omega+3=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=1 ή ω=3 .Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (1,3) ή (1,3) .
Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η παραβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Γ. Έστω R,ρ οι ακτίνες των δύο κύκλων .Τότε :

$$\left.\begin{array}{l}R+\rho=18\\\pi R^2-\pi\rho^2=72\pi\end{array}\right\}\underset{:\pi}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}R+\rho=18\\R^2-\rho^2=72\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}R+\rho=18\\(R-\rho)(R+\rho)=72\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}R+\rho=18\\18(R-\rho)=72\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}R+\rho=18\\R-\rho=4\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}2R=22\\R-\rho=4\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}R=11\\\rho=7\end{pmatrix}$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. $\left.\begin{array}{l}x+\lambda y=\lambda\\-x+\lambda^2y=-\lambda^3\end{array}\right\},\quad \lambda\in R$

Είναι $D=\begin{vmatrix}1&\lambda\\-1&\lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1)$

$$Dx=\begin{vmatrix}\lambda&\lambda\\-\lambda^3&\lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^3+\lambda^4=\lambda^3(\lambda+1)$$

$$Dy=\begin{vmatrix}1&\lambda\\-1&-\lambda^3\end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda=-\lambda(\lambda^2-1)=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

- **Αν** $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ τότε το σύστημα έχει μοναδική την $\left(x, y\right) = \left(\dfrac{Dx}{D}, \dfrac{Dy}{D}\right) = (\lambda^2, 1-\lambda)$

- **Αν** $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή λ=-1

→ Αν λ=0 τότε το σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(0,y)
$x \in \mathbb{R}$

→ Αν λ=-1 τότε το σύστημα γίνεται :

$$\left.\begin{aligned} x - y &= -1 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y &= -1 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(x,x+1),$x \in \mathbb{R}$

B. i. $\left.\begin{aligned} (\lambda-1)x + y &= 1 \\ x + y &= \lambda - 1 \end{aligned}\right\}$

Για να έχει μοναδική λύση , πρέπει $D \neq 0$.

$$D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 = \lambda - 2$$

Άρα πρέπει $\lambda - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$

ii. Για $\lambda \neq 2$ είναι :

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (\lambda - 1) = 1 - \lambda + 1 = 2 - \lambda$$

$$Dy = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$$

Η μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος είναι η

$$\left(\frac{Dx}{D}, \frac{Dy}{D}\right) = \left(\frac{2-\lambda}{\lambda-2}, \frac{\lambda(\lambda-2)}{\lambda-2}\right) = \left(-1, \lambda\right)$$

Πρέπει : $2x_0^2 + y_0^2 = 6 \Leftrightarrow 2(-1)^2 + \lambda^2 = 6 \Leftrightarrow 2 + \lambda^2 = 6$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = 4 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$ και εφόσον $\lambda \neq 2$ θα είναι λ=2 .