**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** **8**

**Β' Λυκείου**

**Ον/μο:**………………………. **ΕΠΑ.Λ.**

**Ύλη: Συστήματα, Ιδιότητες συναρτήσεων, Τριγωνομετρία** **15-01-17**

## Θέμα 1ο:

**Α.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ; **(7 μον.)**

**Β.** Τι ονομάζουμε τριγωνομετρικό κύκλο; **(6 μον.)**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$ . **(7 μον.)**

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

**i.** Το σύστημα $\left.\begin{aligned} x-2y&=3 \\ 5x+4y&=6 \end{aligned}\right\}$ λύνεται μόνο με τη μέθοδο των οριζουσών. **Σ Λ**

**ii.** Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται γραμμική. **Σ Λ**

**iii.** $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . **Σ Λ**

**iv.** Αν ημω=0 τότε υποχρεωτικά θα είναι συνω=1. **Σ Λ**

**v.** Η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 5x + 9$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

**(5x1=5 μον.)**

## Θέμα 2ο:

**Α.** Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} &= -x+5 \\ 1-2x(y-1) &= 3x - y(2x-1) \end{aligned}\right\}$. **(10μον.)**

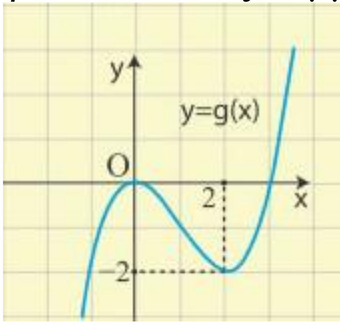
**Β.** Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ 3x+y+2z&=2 \\ 4x-y+3z&=1 \end{aligned}\right\}$. **(7μον.)**

**Γ.** Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned} y&=2x^2 \\ x+y&=3 \end{aligned}\right\}$. **(8μον.)**

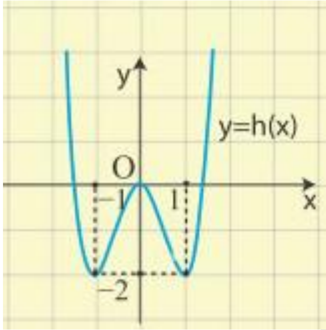
**<u>Θέμα 3<sup></sup>ο:</u>**

**Α.** Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες τους.

**i.**




**ii.**




**(2x5=10 μον.)**

**Β.** Αν για μια γωνία ω γνωρίζουμε ότι $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3}$ τότε να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω. **(8 μον.)**

**Γ.** Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x$ . **(7 μον.)**

**<u>Θέμα 4ο:</u>**

**Α.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ . **(7 μον.)**

**Β.** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$g(x) = -3\eta\mu 2x + 1$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ . **(7 μον.)**

**Γ.** Να απλοποιήσετε την παράσταση :

$$A = \frac{\varepsilon\varphi(5\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)\cdot\eta\mu(2017\pi+\theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)}.$$ **(5 μον.)**

**Δ.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$(\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1)\left(\varepsilon\varphi x + \sqrt{3}\right) = 0 \ .$$ **(6 μον.)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## Θέμα 1$^o$:

**Α.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Δ λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ να ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Β.** Τριγωνομετρικός κύκλος ονομάζεται ένας κύκλος προσαρμοσμένος σε ένα σύστημα συντεταγμένων, με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

**Γ.** Είναι $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$ με $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ και $\eta\mu\omega \neq 0$.

**Δ.** **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Λ **v.**Σ

## Θέμα 2$^o$:

**Α.**

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-2y}{2} - \frac{3y-1}{4} = -x+5 \\ 1-2x(y-1) = 3x - y(2x-1) \end{array}\right\} \overset{\cdot 4}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 4\cdot\frac{x-2y}{2} - 4\cdot\frac{3y-1}{4} = -4x+20 \\ 1-2xy+2x = 3x-2xy+y \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2(x-2y)-(3y-1) = -4x+20 \\ -2xy+2x-3x+2xy-y = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-4y-3y+1 = -4x+20 \\ -x-y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x-4y-3y+4x = 20-1 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 6x-7y=19 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \underset{\cdot 7}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 6x-7y=19 \\ 7x+7y=7 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} 13x = 26 \\ x+y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right).$$

Άρα $(x,y) = (2,-1)$.

**Β.** $$\left.\begin{array}{ll} 2x+y+z=1 & (1) \\ 3x+y+2z=2 & (2) \\ 4x-y+3z=1 & (3) \end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (2), (3) κατά μέλη:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y+2z=2 \\ 4x-y+3z=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 7x+5z=3 \ (4) .$$

Προσθέτουμε τις (1), (3) κατά μέλη:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=1 \\ 4x-y+3z=1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 6x+4z=2 \ (5) .$$

Λύνουμε το σύστημα των (4) και (5):

$$\left.\begin{array}{l} 7x+5z=3 \\ 6x+4z=2 \end{array}\right\} \underset{\cdot 5}{\overset{\cdot(-4)}{\Longleftrightarrow}} \left.\begin{array}{l} -28x-20z=-12 \\ 30x+20z=10 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 2x=-2 \\ 6x+4z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ -6+4z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1 \\ 4z=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x=-1 \\ z=2 \end{array}\right).$$

Αντικαθιστώντας στην (1) x=-1 και z=2 έχουμε: $-2+y+2=1 \Leftrightarrow y=1$.

Επομένως, η λύση του συστήματος είναι: $(x,y,z)=(-1,1,2)$ .

**Γ.** $$\left.\begin{array}{l} y=2x^2 \\ x+y=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=2x^2 \\ x+2x^2=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{ll} y=2x^2 & (1) \\ 2x^2+x-3=0 & (2) \end{array}\right\}$$

Η (2) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-4\cdot 2\cdot(-3)=1+24=25>0$ . Οπότε έχει 2 άνισες

λύσεις τις: $$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm 5}{4}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{4}{4}=1 \end{array}\right. .$$

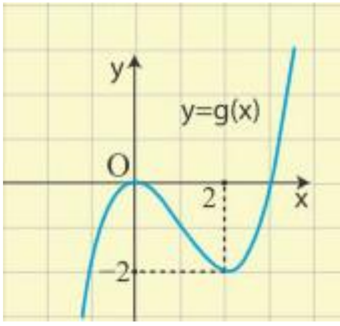
Αντικαθιστώντας τις λύσεις αυτές στην (1) προκύπτει:

$y_1=2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2=2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$ και $y_2=2\cdot 1^2=2$ . Άρα οι λύσεις του

συστήματος είναι: $(x,y)=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$ και $(x,y)=(1,2)$ .

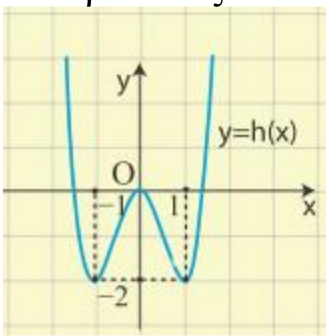
**Θέμα 3$^o$:**

**Α.i.**




Η g είναι $\nearrow$ στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$. Είναι $\searrow$ στο $[0,2]$. Δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα και δεν είναι άρτια, ούτε περιττή.

**ii.**




Η h είναι $\searrow$ στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ και $[0,1]$, ενώ είναι $\nearrow$ στα $[-1,0]$ και $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το y=-2 για $x=\pm 1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Είναι άρτια εφόσον έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

**Γ.** Γνωριζουμε ότι **εφω=**$\sqrt{3}$ και $\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}$. Τότε:

$$\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1\Leftrightarrow\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\sigma\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{1}{2}\overset{\pi<\omega<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}.$$

Τέλος, $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\varepsilon\varphi\omega\cdot\eta\mu\omega\Leftrightarrow\eta\mu\omega=\sqrt{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$$\eta\mu\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Γ.** Είναι: $1-\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}-\dfrac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu x-\left(1-\sigma\upsilon\nu^2 x\right)}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu x-1+\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\left(1+\sigma\upsilon\nu x\right)}{1+\sigma\upsilon\nu x}=\sigma\upsilon\nu x.$$

**Θέμα 4$^o$:**

**Α.** Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει :

∗ Πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

∗ Σύνολο τιμών το $B=[-1,1]$ .

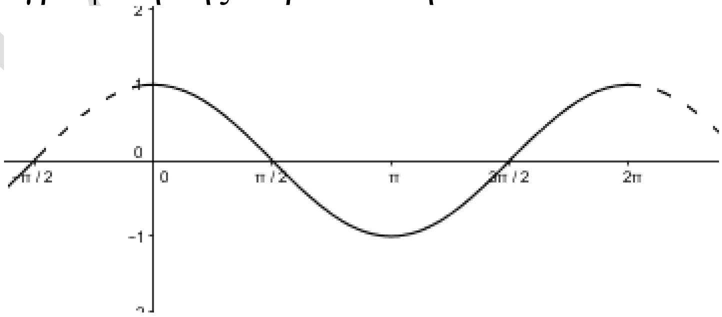
∗ Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π .

∗ Είναι άρτια , εφόσον $f(-x)=\sigma\upsilon\nu(-x)=\sigma\upsilon\nu x=f(x)$, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$ .

∗ Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το y=1 για $x=0$ και για $x=2\pi$, ενώ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pi$ .

∗ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi,2\pi]$ .

∗ Η γραφική της παράσταση είναι :

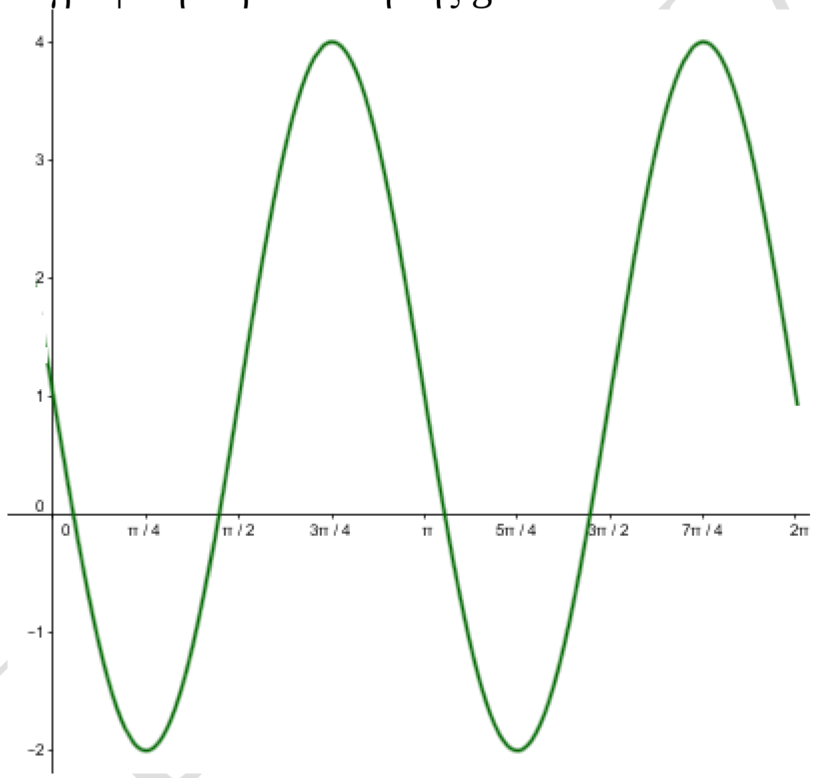


**Β.** Η $g(x) = -3\eta\mu 2x + 1$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ και βήμα

$\beta = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$ . Ο πίνακας τιμών της είναι:

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| ημ2x | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 |
| -3ημ2x | 0 | -3 | 0 | 3 | 0 |
| -3ημ2x+1 | 1 | -2 | 1 | 4 | 1 |

Η γραφική παράσταση της g είναι:




**Γ.**
$$A = \frac{\varepsilon\varphi(5\pi - \theta)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)\cdot\eta\mu\left(2017\pi + \theta\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{15\pi}{2} - \theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{23\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$A = \frac{(-\varepsilon\varphi\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)}{(-\eta\mu\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-\varepsilon\varphi\theta)} = 1.$$

**Δ.** $\left(\eta\mu x-1\right)\left(2\sigma\upsilon\nu x+1\right)\left(\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}.$

ή

$2\sigma\upsilon\nu x+1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}.$

ή

$\varepsilon\varphi x+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow$

$x=\kappa\pi-\frac{\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}.$