ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

8

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Στατιστική –Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης **25-11-13**

<u>Θέμα 1ο</u>:

Α. Έστω ένα δείγμα μεγέθους ν με παρατηρήσεις $t_1, t_2, ..., t_\nu$.
Πως ορίζεται η διάμεσος των παρατηρήσεων ; **(9 μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0,
το οποίο περιέχεται στο πεδίο ορισμού της; **(8 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i.Μία συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$ όταν είναι συνεχής στο διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ και $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f\left(x\right) = f\left(\alpha\right)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f\left(x\right) = f\left(\beta\right)$. **Σ Λ**

ii.Ισχύει ότι $\left(f o g\right)\left(x\right) = \left(g o f\right)\left(x\right)$. **Σ Λ**

iii.Η διάμεσος ενός δείγματος είναι πάντα ίση με την τιμή μιας παρατήρησης. **Σ Λ**

iv.Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) + \lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Δ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i.Το ύψος είναι μία …………….. μεταβλητή και ειδικότερα μία ……………… μεταβλητή.

ii.Αν υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$**,** $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$ τότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = $……………………………………..
- $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt{f\left(x\right)} = $…………………………………

(2x2=4 μον.)

Θέμα 2ο:

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο αριθμός των παιδιών που υπάρχουν σε 50 οικογένειες ενός χωριού.

Παιδιά x_i	**Οικογένειες** v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	N_i
1	12			
2	15			
3	8			
4	5			
5				
Άθροισμα				

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα . **(8 μον.)**

Β.i. Πόσες οικογένειες έχουν το πολύ 3 παιδιά;

ii. Ποιό ποσοστό των οικογενειών έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά;

iii. Πόσες οικογένειες έχουν τουλάχιστον 2 αλλά το πολύ 4 παιδιά; **(3x2=6 μον.)**

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων του δείγματος. **(6 μον.)**

Δ. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό. **(5 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+4}{x^2-7x+8}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}}{5x}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x-1}$

v. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4-x}$

vi. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$ **(6x3=18 μον.)**

B. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\begin{cases} x^2-x-3, & x<-2 \\ x^2-5, & x\geq -2 \end{cases}$ και

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x<1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}+3\sqrt{x}, & x>1 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to -2} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to 1} g(x), \lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

(4 μον.)

Γ. Αν γνωρίζετε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=2$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=3$, να υπολογίσετε τα παρακάτω:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ **(1,5 μον.)**

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2f(x)+4g(x)}{f(x)\cdot g(x)}$ **(1,5 μον.)**

<u>Θέμα 4</u>^{o}:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}, & 0<x<4 \\ \beta, & x=4 \\ \alpha x, & x>4 \end{cases}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. **(5 μον.)**

B. Υπολογίστε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$. **(8 μον.)**

Γ. Να βρείτε τους αριθμούς α και β ώστε η f να είναι συνεχής. **(8 μον.)**

Δ. Για $\alpha=-\dfrac{1}{16}$ και $\beta=-\dfrac{1}{4}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=f(4)+2f(6)$. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}:

Α. Για τη διάμεσο , διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά .Στη συνέχεια :

- Αν το μέγεθος ν του δείγματος είναι περιττός αριθμός , διάμεσος δ είναι η μεσαία παρατήρηση .
- Αν το μέγεθος ν του δείγματος είναι άρτιος αριθμός , διάμεσος δ είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Β. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 , το οποίο περιέχεται στο πεδίο ορισμού της , όταν :

1) υπάρχει το όριο :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\left[\text{δηλαδή } \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)\right]$$

και επιπλέον :

2) το όριο ισούται με $f(x_0)\left[\text{δηλαδή } \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\right]$.

Γ. **i.** Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Λ

Δ. **i.**Το ύψος είναι μία **ποσοτική** μεταβλητή και ειδικότερα μία **συνεχής** μεταβλητή.

ii.Αν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$**,** $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τότε:

- $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ **εφόσον βέβαια** $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$
- $\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, **εφόσον βέβαια** $f(x)\geq 0$**, κοντά στο x_0.**

Θέμα 2ο:

Α

x_i	v_i	$f_i\%$	$F_i\%$	N_i	$x_i v_i$
1	12	24	24	12	12
2	15	30	54	27	30
3	8	16	70	35	24
4	5	10	80	40	20
5	10	20	100	50	50
Σύνολο	50	100	-	-	136

Έχουμε ότι ν=50 .Οπότε $\nu_5 = \nu - (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4) = 10$

Για τη στήλη $f_i\%$ είναι $f_i\% = \dfrac{v_i}{v} \cdot 100$

Έπειτα $F_1\% = f_1\%$, $F_2\% = F_1\% + f_2\%$ κ.ο.κ

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$ κ.ο.κ

Β. i. Το πολύ 3 παιδιά έχουν οι $N_3 = 35$ οικογένειες .

ii. Το ποσοστό των οικογενειών που έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά είναι : $100\% - f_1\% = 100\% - 24\% = 76\%$.

iii. Οι οικογένειες που έχουν τουλάχιστον 2 παιδιά αλλά το πολύ 4 είναι : $v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 8 + 5 = 28$.

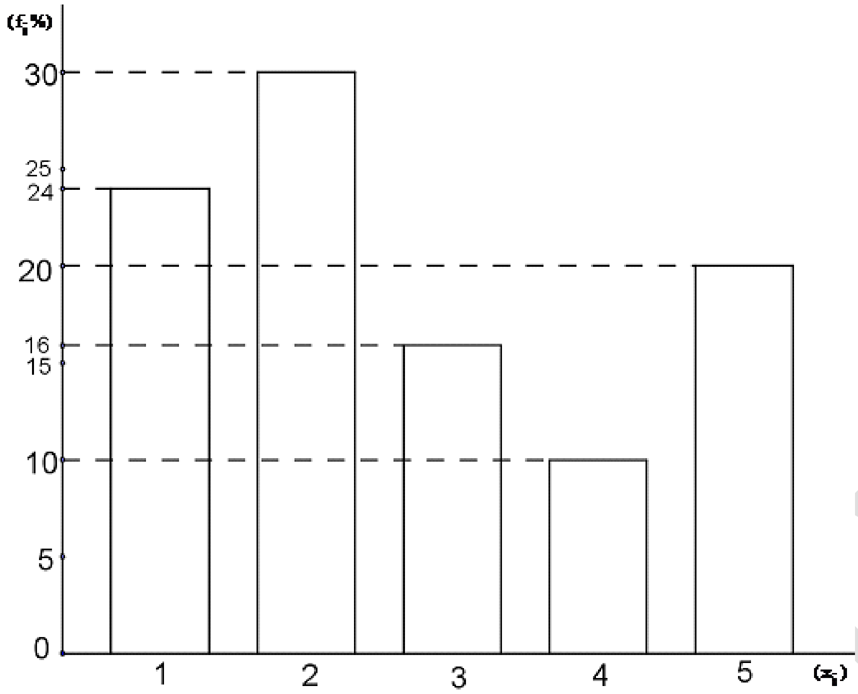
Γ. Για τη μέση τιμή συμπληρώνουμε τη στήλη $x_i v_i$ και έχουμε

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i v_i}{v} = \frac{136}{50} = 2,72.$$

Για τη διάμεσο έχουμε ότι ν=50(άρτιος) οπότε :

$$\delta = \frac{25^{\eta} + 26^{\eta}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Δ.



<u>Θέμα 3</u>

<u>Θέμα 3ο</u>:

Α. i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+4}{x^2-7x+8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

ii. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-3}}{5x}=\dfrac{0}{15}=0$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$

iv. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$ (1)

Για το τριώνυμο $2x^2+5x-7$ έχουμε

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=5^2-4\cdot 2\cdot(-7)=81>0$. Οπότε έχει δύο άνισες ρίζες τις : $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-5\pm 9}{4}$ δηλαδή $x_1=1$ και $x_2=-\dfrac{14}{4}$

Τότε η (1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)\left(x+\dfrac{14}{4}\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left(2x+7\right)=9$

v. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{4-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{4-x}=\lim\limits_{x\to 4}\left[-(x+4)\right]=-5$

vi. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2\right]\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left[\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-3^2\right]\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

B. Για το $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$ έχουμε :

$\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2-x-3\right)=4+2-3=3$

$\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(x^2-5\right)=4-5=-1$

Εφόσον $\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to -2^+}f(x)$ δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$.

Επίσης , $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5)=1-5=-4$

Για το $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{x^2-3x+2}{x-1} + 3\sqrt{x}\right] = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{(x-1)(x-2)}{x-1} + 3\sqrt{x}\right] =$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(x-2+3\sqrt{x}\right) = 1-2+3 = 2.$$

Οπότε , εφόσον $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 2$ έπεται ότι $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$.

Τέλος , $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 1.$

Γ. Εφόσον υπάρχουν τα όρια των f , g στο x_0 , θα ορίζονται οι πράξεις μεταξύ των ορίων τους .Τότε :

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 2\cdot 3 = 6$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2f(x)+4g(x)}{f(x)\cdot g(x)} = \dfrac{2\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + 4\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{2\cdot 2+4\cdot 3}{6} = \dfrac{13}{6}$

<u>**Θέμα 4^{o}**</u>:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}, & 0<x<4 \\ \beta\ , & x=4 \\ \alpha x\ , & x>4 \end{cases}$$

Α. Η f ορίζεται για κάθε x με $0 < x \le 4$.

Β. Για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$, πρέπει $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$

Οπότε : $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-4}{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{(4-x)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \left[-\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right] = -\frac{1}{4}$$

Επίσης , $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \alpha x = 4\alpha$

Πρέπει : $4\alpha = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 16\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\dfrac{1}{16}$.

Γ. ● Για $0<x<4$ η f είναι συνεχής ως ρητή πολυωνυμική.

● Για $x>4$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

● Για $x=4$ αρχικά πρέπει $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$ δηλαδή $\alpha = -\dfrac{1}{16}$.

Επίσης πρέπει $f(4) = \lim\limits_{x\to 4} f(x) \Leftrightarrow \beta = -\dfrac{1}{4}$.

Δ. Για $\alpha = -\dfrac{1}{16}$ και $\beta = -\dfrac{1}{4}$ η f γίνεται :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{4-x}, & 0<x<4 \\ -\dfrac{1}{4}, & x=4 \\ -\dfrac{x}{16}, & x>4 \end{cases}$$

Τότε $K = f(4) + 2f(6) = -\dfrac{1}{4} + 2\cdot\left(\dfrac{-6}{16}\right) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{6}{8} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{5}{4}$.