ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη: Έκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση **Γεν. Παιδείας**

05-02-12

Θέμα 1ο:

Α.i. Να δείξετε ότι αν α>0 με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε

$\theta_1 > 0, \quad \theta_2 > 0$ ισχύει : $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$. **(7 μον.)**

ii. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_\alpha x$ και $y = \alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{o}y$ και $x'\hat{o}y'$. **(8 μον.)**

Β. Να απαντήσετε με (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος στις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{3}{e}\right)^x$ έχει ασύμπτωτη το θετικό ημιάξονα των x . **Σ Λ**

ii. Αν $x < 0$, τότε $10^x < 1$. **Σ Λ**

iii. Αν $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$ τότε ισχύει $\ln(\theta_1 + \theta_2) = \ln\theta_1 \cdot \ln\theta_2$. **Σ Λ**

iv. $\log_2 5 = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$. **Σ Λ**

v. Η εξίσωση $(x-2)\log 2 + (x-5)\log 5 = 0$ είναι λογαριθμική. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

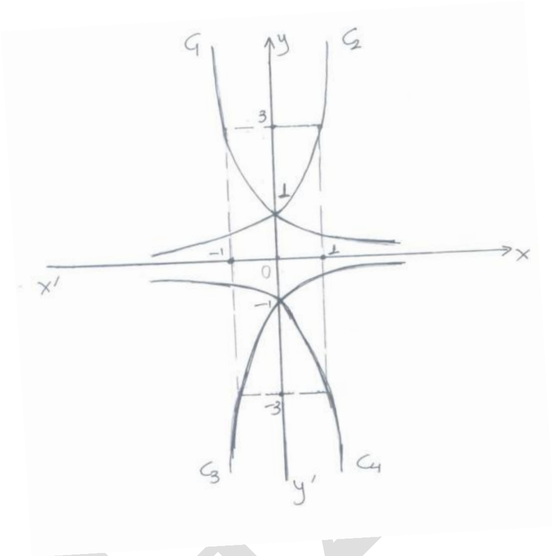
Θέμα 2ο:

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{2-3\alpha}{\alpha - 1}\right)^x$

i. Να βρείτε τις τιμές του α που η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τις τιμές του α που η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **(6 μον.)**

Β. Στο διπλανό σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση C_1 της $f_1(x)=3^{-x}$, η καμπύλη C_2 της συμμετρικής της C_1 ως προς τον άξονα y΄y ,η καμπύλη C_3 συμμετρική της C_1 ως προς τον άξονα x΄x, και η καμπύλη C_4 συμμετρική της C_2 ως προς τον x΄x . Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων $f_2(x), f_3(x)$ και $f_4(x)$, των οποίων οι C_2 , C_3 και C_4 αποτελούν τις γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα .



(5 μον.)

Γ.i. Να λύσετε την εξίσωση : $e^{2x}-(1+e)e^{x}+e=0$

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8<0$ **(2x5=10μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Για τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=\log_{\frac{1}{10}} x$ να γράψετε :

i. Το πεδίο ορισμού .
ii. Το σύνολο τιμών .
iii. Τη μονοτονία.
iv. Τα σημεία τομής με τους άξονες .
v. Τις ασύμπτωτους των γραφικών τους παραστάσεων.

(5x2=10μον.)

Β. i. Να λύσετε την εξίσωση : $2\log x-\log(x+6)=\log 3$

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\ln(x+1)+\ln x>\ln 2$ **(2x5=10μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα :

$$\left.\begin{array}{l} e^{x+1}\cdot e^{y-1}=1 \\ e^{x}:e^{y}=e^{2} \end{array}\right\}$$

(5 μον.)

Θέμα 4ο:

Α . Να αποδείξετε ότι :

i. $\frac{1}{2}\ln 9 - \frac{1}{3}\ln 64 + \ln 4 = \ln 3$ **(2 μον.)**

ii. $2\log_3 \sqrt{3} + 6\ln \sqrt[3]{e} - 2\log \sqrt[4]{10} = \frac{5}{2}$ **(3 μον.)**

Β. i.Να δείξετε ότι : $2^{\ln x} = x^{\ln 2}$

ii.Να λύσετε την εξίσωση $4^{\ln x} - 9 \cdot x^{\ln 2} + 8 = 0$ **(2x4=8μον.)**

Γ. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \alpha + \ln(e^x - 2)$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

ii. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο A(ln3,1) να δείξετε ότι α=1 .

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x΄x .

iv. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

(4x3=12μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α.i. θα δείξουμε ότι $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$

Έστω $\left.\begin{array}{l} \log_\alpha \theta_1 = x_1 \Leftrightarrow \alpha^{x_1} = \theta_1 \\ \log_\alpha \theta_2 = x_2 \Leftrightarrow \alpha^{x_2} = \theta_2 \end{array}\right\} \overset{(:)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{\alpha^{x_1}}{\alpha^{x_2}} = \dfrac{\theta_1}{\theta_2}$

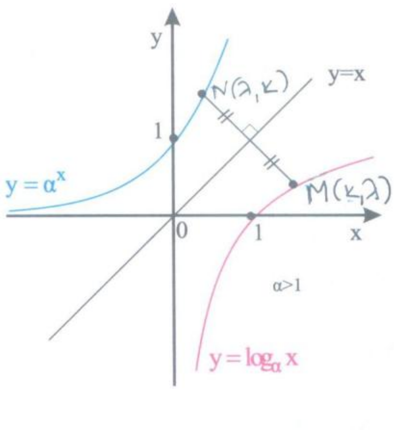
Δηλαδή **,** $\alpha^{x_1 - x_2} = \dfrac{\theta_1}{\theta_2} \Leftrightarrow$

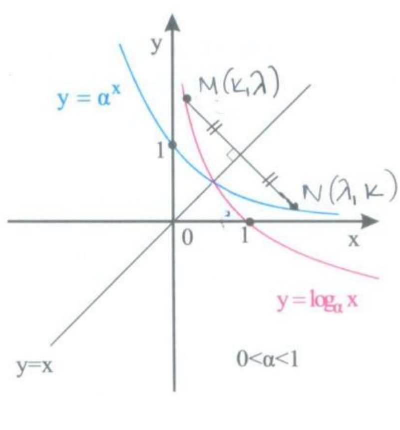
$$x_1 - x_2 = \log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

Όμως $x_1 = \log_\alpha \theta_1$ και $x_2 = \log_\alpha \theta_2$

Άρα $\log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2 = \log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2}$

ii. Έστω οι συναρτήσεις $y = \alpha^x$, $x \in R$ και $y = \log_\alpha x$, $x > 0$ με α>0 και $\alpha \neq 1$.Τότε επειδή $\log_\alpha x = y \Leftrightarrow \alpha^y = x$, αν το Μ(κ,λ) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \log_\alpha x$, τότε το Ν(λ,κ) θα είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \alpha^x$ και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως Μ(κ,λ) , Ν(λ,κ) είναι συμμετρικά ως προς την y=x .Επομένως , οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \log_\alpha x$ και $y = \alpha^x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{o}y$ και $x'\hat{o}y'$.





B.i. <u>Λάθος</u> εφόσον $e \simeq 2,7$ έπεται ότι $\frac{3}{e} > 1$ άρα έχει ασύμπτωτη τον αρνητικό ημιάξονα των x .

ii.<u>Σωστό</u> Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=10^x$.Τότε εφόσον 10>1, η f είναι γνησίως αύξουσα .Άρα $x<0 \Rightarrow 10^x < 10^o \Rightarrow x<1$

iii.<u>Λάθος</u> Ισχύει ότι $\ln(\theta_1\cdot\theta_2)=\ln\theta_1+\ln\theta_2$

iv.<u>Σωστό</u> Με αλλαγή βάσης προκύπτει ότι : $\log_2 5=\frac{\ln 5}{\ln 2}$

v.<u>Λάθος</u> Η εξίσωση δεν είναι λογαριθμική .Είναι πολυωνυμική .

<u>Θέμα 2^o:</u>

A. $f(x)=\left(\frac{2-3\alpha}{\alpha-1}\right)^x$

i. Για να ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ η f πρέπει $\frac{2-3\alpha}{\alpha-1}>0$

Πρέπει $\alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$. Τότε :

$$\frac{2-3\alpha}{\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (2-3\alpha)(\alpha-1)>0 \quad (1)$$

Βρίσκουμε τις αντίστοιχες ρίζες :

- $2-3\alpha=0 \Leftrightarrow 3\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{2}{3}$
- $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ απορρίπτεται .

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου .

α	0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Γ		−	0	+	‖	−	

Άρα από την (1) έχουμε ότι $\alpha\in\left(\frac{2}{3},1\right)$

ii. Για να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η f πρέπει :

$$\frac{2-3\alpha}{\alpha-1}>1$$

Πρέπει $\alpha-1\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq 1$. Τότε :

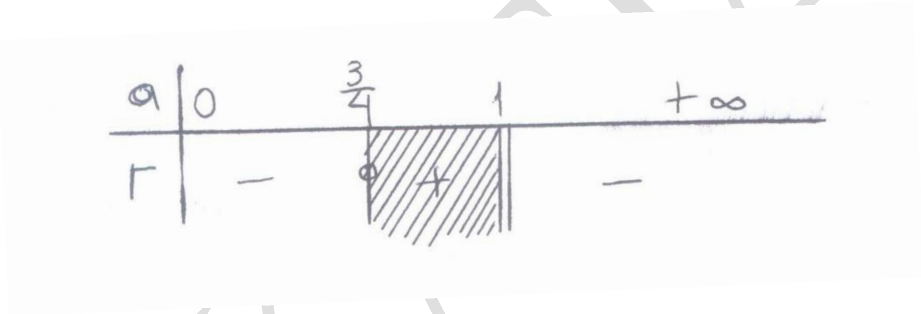
$$\frac{2-3\alpha}{\alpha-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{2-3\alpha}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{\alpha-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-3\alpha-\alpha+1}{\alpha-1}>0 \Leftrightarrow \frac{3-4\alpha}{\alpha-1}>0 \Leftrightarrow (3-4\alpha)(\alpha-1)>0 \ (2)$$

Βρίσκουμε τις αντίστοιχες ρίζες :

- $3-4\alpha=0 \Leftrightarrow 4\alpha=3 \Leftrightarrow \alpha=\frac{3}{4}$.
- $\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ απορρίπτεται .

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων του γινομένου .



Άρα από την (2) έχουμε ότι $\alpha\in\left(\frac{3}{4},1\right)$.

Β. Εφόσον η C_2 είναι συμμετρική ως προς τον y΄y με την C_1 που είναι η γραφική παράσταση της $f_1(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

έπεται ότι $f_2(x)=f_1(-x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$ άρα $\boxed{f_2(x)=3^x}$.

Εφόσον η C_3 είναι συμμετρική ως προς τον x΄x με την C_1 έχουμε ότι $f_3(x)=-f_1(x) \Leftrightarrow f_3(x)=-3^{-x}$. Άρα $\boxed{f_3(x)=-3^{-x}}$

Εφόσον η C_4 είναι συμμετρική της C_2 ως προς τον x΄x, έπεται ότι $f_4(x)=-f_2(x) \Leftrightarrow f_4(x)=-3^x$. Άρα $\boxed{f_4(x)=-3^x}$

Γ.i. $e^{2x}-(1+e)e^{x}+e=0$

θέτουμε $e^{x}=\omega$ κι έχουμε :

$\omega^{2}-(1+e)\omega+e=0 \Leftrightarrow (\omega-1)(\omega-e)=0 \Leftrightarrow$

$\omega-1=0 \Leftrightarrow \omega=1$

ή

$\omega-e=0 \Leftrightarrow \omega=e$

Άρα $e^{x}=1 \Leftrightarrow e^{x}=e^{0} \underset{1-1}{\overset{e^{x}}{\Leftrightarrow}} x=0$

ή

$e^{x}=e \Leftrightarrow e^{x}=e^{1} \underset{1-1}{\overset{e^{x}}{\Leftrightarrow}} x=1$

ii. $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8<0 \Leftrightarrow (2^{x})^{2}-9\cdot 2^{x}+8<0$

Θέτουμε $2^{x}=y$ κι έχουμε : $y^{2}-9y+8<0 \Leftrightarrow (y-8)(y-1)<0$

- $y-8=0 \Leftrightarrow y=8$
- $y-1=0 \Leftrightarrow y=1$

Άρα $(y-8)(y-1)<0 \Leftrightarrow y\in(1,8)$ δηλαδή $1<y<8$

Άρα $1<2^{x}<8 \Leftrightarrow 2^{0}<2^{x}<2^{3} \overset{2^{x}:\nearrow}{\Leftrightarrow} 0<x<3$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Για την $f(x)=\ln x$ έχουμε :

i. Π.Ο.= $(0,+\infty)$
ii. Σ.Τ.=$\mathbb{R}$
iii. Η f είναι γνησίως αύξουσα .
iv. Τέμνει τον x΄x στο (1,0) .Δεν τέμνει τον y΄y .
v. Έχει ασύμπτωτο τον αρνητικό ημιάξονα των y , δηλαδή τον Oy΄.

Για την $g(x)=\log_{\frac{1}{10}} x$ έχουμε :

i. Π.Ο.=$(0,+\infty)$
ii. Σ.Τ. =$\mathbb{R}$
iii. Η g είναι γνησίως φθίνουσα .
iv. Η g τέμνει τον x΄x στο (1,0) και δεν τέμνει τον y΄y .

v. Η g έχει ασύμπτωτο τον θετικό ημιάξονα των y , δηλαδή τον 0y .

Β. i. $2\log x - \log(x+6) = \log 3$

Πρέπει $\left.\begin{array}{l} x>0 \\ x+6>0 \Leftrightarrow x>-6 \end{array}\right\} \Rightarrow x>0$

Τότε έχουμε : $2\log x - \log(x+6) = \log 3 \Leftrightarrow \log x^2 - \log(x+6) = \log 3$

$$\Leftrightarrow \log\frac{x^2}{x+6} = \log 3 \overset{\log:1-1}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{x+6} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3(x+6) \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 3x+18 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-6=0 \Leftrightarrow x=6$$

ή

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ απορρίπτεται .

Άρα x=6.

ii. $\ln(x+1) + \ln x > \ln 2$

Πρέπει $\left.\begin{array}{l} x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \\ x>0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x>0$

Τότε έχουμε :

$$\ln(x+1) + \ln x > \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left[(x+1)\cdot x\right] > \ln 2 \overset{\ln\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$(x+1)\cdot x > 2 \Leftrightarrow x^2 + x > 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \ (1)$$

Λύνω την αντίστοιχη εξίσωση :

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$$

ή

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

Άρα από την (1) με πρόσημο του τριωνύμου έχουμε $x<-2$ και x>1 .Με τον περιορισμό ότι x>0 τελικά προκύπτει x>1 .

Γ. $\left.\begin{array}{l} e^{x+1}\cdot e^{y-1} = 1 \\ e^x : e^y = e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^x\cdot e\cdot e^y\cdot\frac{1}{e} = 1 \\ e^x : e^y = e^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e^{x+y} = e^0 \\ e^{x-y} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} 2x=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x=1 \\ y=-1 \end{pmatrix}$$

<u>Θέμα 4^o:</u>

Α. i. $\frac{1}{2}\ln 9-\frac{1}{3}\ln 64+\ln 4=\ln 9^{\frac{1}{2}}-\ln 64^{\frac{1}{3}}+\ln 4=$

$=\ln\sqrt{9}-\ln\sqrt[3]{64}+\ln 4=\ln 3-\ln 4+\ln 4=\ln 3$

ii. $2\log_3\sqrt{3}+6\ln\sqrt[3]{e}-2\log\sqrt[4]{10}=\log_3(\sqrt{3})^2+\ln(\sqrt[3]{e})^6-\log(\sqrt[4]{10})^2=$

$\log_3 3+\ln\left[\left(\sqrt[3]{e}\right)^3\right]^2-\log(10^{\frac{1}{4}})^2=1+\ln e^2-\log 10^{\frac{2}{4}}=$

$1+2\ln e-\frac{2}{4}\log 10=1+2-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

Β.i. $2^{\ln x}=x^{\ln 2}\Leftrightarrow$

$\ln 2^{\ln x}=\ln x^{\ln 2}\Leftrightarrow$

$\ln x\cdot\ln 2=\ln 2\cdot\ln x$ που ισχύει

ii. $4^{\ln x}-9\cdot x^{\ln 2}+8=0$

Πρέπει x>0 τότε έχουμε :

$(2^2)^{\ln x}-9\cdot x^{\ln 2}+8=0\overset{(i)}{\Leftrightarrow}(2^{\ln x})^2-9\cdot 2^{\ln x}+8=0$

Θέτουμε $2^{\ln x}=\omega$ και έχουμε :

$\omega^2-9\omega+8=0\Leftrightarrow(\omega-8)(\omega-1)=0\Leftrightarrow$

$\omega-8=0\Leftrightarrow\omega=8$

ή

ω-1=0$\Leftrightarrow$ω=1

Δηλαδή , $2^{\ln x}=8\Leftrightarrow 2^{\ln x}=2^3\overset{2^x:1-1}{\Leftrightarrow}\ln x=3\Leftrightarrow x=e^3$

ή

$2^{\ln x}=1\Leftrightarrow 2^{\ln x}=2^{o}\overset{2^x:1-1}{\Leftrightarrow}\ln x=0\Leftrightarrow x=1$

Γ. $f(x)=\alpha+\ln(e^x-2)$

i. Για να ορίζεται η f πρέπει

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \overset{\ln x:\nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$$

Άρα $A_f = (\ln 2, +\infty)$

ii. Εφόσον η C_f διέρχεται από το A(ln3,1) έχουμε ότι :

$$f(\ln 3) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \ln(e^{\ln 3} - 2) = 1 \Leftrightarrow \alpha + \ln(3-2) = 1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha + \ln 1 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

iii. Για να τέμνει η C_f τον x΄x πρέπει f(x)=0 .

Άρα $1 + \ln(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = -1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 2) = \ln e^{-1} \overset{\ln x:1-1}{\Leftrightarrow}$

$$e^x - 2 = e^{-1} \Leftrightarrow e^x = e^{-1} + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e} + 2 \Leftrightarrow$$
$$e^x = \frac{1+2e}{e} \Leftrightarrow \ln e^x = \ln\left(\frac{1+2e}{e}\right) \Leftrightarrow x = \ln(1+2e) - \ln e \Leftrightarrow$$
$$x = \ln(1+2e) - 1$$

Άρα η C_f τέμνει τον x΄x στο $(\ln(1+2e) - 1, 0)$

iv. Έστω x_1 , $x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$.Τότε :

$$x_1 < x_2 \overset{e^x \nearrow}{\Longleftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \overset{\ln\nearrow}{\Rightarrow}$$
$$\ln(e^{x_1} - 2) < \ln(e^{x_2} - 2) \Rightarrow 1 + \ln(e^{x_1} - 2) < 1 + \ln(e^{x_2} - 2) \Rightarrow$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα .