ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη: Πολυώνυμα **Γεν. Παιδείας**

11-12-11

Θέμα 1ο:

Α.i. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-ρ, αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x).

(10 μον.)

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ακέραιων ριζών.

(5 μον.)

Β. Να απαντήσετε με (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος στις παρακάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = -5x^{2010} + 3x^{2007} - 4$ με το x+1 είναι -12. **Σ Λ**

ii. Αν $P(x) = \kappa x^4 - \lambda x^2 + 9$ τότε $P(-5) = -P(5)$ **Σ Λ**

iii. Η παράσταση $P(x) = 7 \cdot x^4 - 4 \cdot x^{-3} + 8x^2 - 6x + 3$ είναι πολυώνυμο. **Σ Λ**

iv. Το πολυώνυμο P(x)=0 είναι μηδενικού βαθμού. **Σ Λ**

v. Αν ρ είναι μια ρίζα του $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ τότε $P(P(\rho)) = \alpha_0$ **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

i. P(2x-1) ii. $P(x^2)$

(2x4=8 μον.)

Β. Αν για το πολυώνυμο Q(x) ισχύει: $Q(2x-1) = 4x^2 - 8x + 1$ να βρείτε το Q(x).

(8 μον.)

Γ. Να βρείτε πολυώνυμο Η(x) ώστε $H(H(x)) = 4x + 3$.

(9 μον.)

Θέμα 3ο:

Α.Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=5x^8+3x^4+2$ δεν έχει παράγοντα της μορφής x-ρ.

(5 μον.)

Β.Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+4$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)^2$

(5 μον.)

Γ.Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2\alpha x+\beta+4$ το οποίο έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3.

i.Να δείξετε ότι α=2 και β=-4.

ii.Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1.

iii.Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3-4x$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία ε: y=x-2.

(3x5=15 μον.)

Θέμα 4ο:

Α.Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3x+1}-\sqrt{7x+1}=-\sqrt{x-1}$.

(7 μον.)

Β.Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{5x^3+1}{x^2-1}+\frac{3}{1-x}>1$.

(8 μον.)

Γ.Το βάθος (σε m) στο οποίο βρίσκεται ένας δύτης τη χρονική στιγμή t(σε h) μέχρι τη στιγμή που θα βγει στην επιφάνεια της θάλασσας δίνεται από τη συνάρτηση: $f(t)=-20+10t-2t^2+t^3,\ t\geq 0$.

i. Να βρείτε σε ποιό βάθος βρίσκεται ο δύτης τη χρονική στιγμή t=0.

(2 μον.)

ii. Να βρείτε μετά από πόση ώρα ο δύτης θα αναδυθεί στην επιφάνεια της θάλασσας.

(3 μον.)

iii. Να βρείτε σε ποιές χρονικές στιγμές ο δύτης βρισκόταν σε βάθος 11m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

(5 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο:

Α.i.(⇒) Έστω ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε

$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$. Από την ισότητα αυτή για x=ρ παίρνουμε

$P(\rho)=(\rho-\rho)\cdot\pi(\rho)=0$. Άρα το ρ είναι ρίζα του P(x).

(⇐) Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), άρα P(ρ)=0. Τότε από τη σχέση

$$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon\overset{\upsilon=P(\rho)}{\Rightarrow}$$
$$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+P(\rho)\overset{P(\rho)=0}{\Rightarrow}$$
$$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+0$$

δηλαδή $P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$ άρα x-ρ παράγοντας του P(x).

ii. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος ρ≠0 είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

Β.i. Σωστό.

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι το P(-1).

$$P(-1)=-5\cdot(-1)^{2010}+3\cdot(-1)^{2007}-4=-5-3-4=-12.$$

ii. Λάθος.

Είναι $P(-5)=\kappa\cdot(-5)^4-\lambda\cdot(-5)^2+9=\kappa\cdot 5^4-\lambda\cdot 5^2+9=P(5)$

iii. Λάθος.

Δεν είναι πολυώνυμο επειδή υπάρχει εκθέτης που δεν ανήκει στους Φυσικούς, εφόσον $-3\notin\mathbb{N}$.

iv. Λάθος.

Το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

v) Σωστό.

Εφόσον ρ ρίζα του P(x) τότε P(ρ)=0. Άρα P(P(ρ))=P(0)=α_0.

Θέμα 2ο:

Α. $P(x)=x^2-3x+2$

i. $P(2x-1)=(2x-1)^2-3(2x-1)+2=4x^2-4x+1-6x+3+2=$
$4x^2-10x+6$

ii. $P(x^2)=(x^2)^2-3x^2+2=x^4-3x^2+2$.

Β. Είναι $Q(2x-1)=4x^2-8x+1$.

Θέτουμε $2x-1=\omega \Leftrightarrow 2x=\omega+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\omega+1}{2}$.

Άρα για $x=\dfrac{\omega+1}{2}$ έχουμε:

$$Q(\omega)=4\cdot\left(\frac{\omega+1}{2}\right)^2-8\left(\frac{\omega+1}{2}\right)+1=4\cdot\frac{(\omega^2+2\omega+1)}{4}-4(\omega+1)+1=$$
$$=\omega^2+2\omega+1-4\omega-4+1=\omega^2-2\omega-2$$

Άρα εφόσον $Q(\omega)=\omega^2-2\omega-2$ έχουμε $Q(x)=x^2-2x-2$.

Γ. $H(H(x))=4x+3$

Έστω ν ο βαθμός του H(x). Τότε ο βαθμός του H(H(x)) είναι ν^2. Και Εφόσον $H(H(x))=4x+3$ και ο βαθμός του 4x+3 είναι 2 θα είναι:ν^2=1 δηλ ν=1(εφόσον $\nu\in\mathbb{N}$). Άρα το H(x) θα έχει τη μορφή αx+β. Επομένως

$$H(H(x))=4x+3 \Leftrightarrow H(\alpha x+\beta)=4x+3 \Leftrightarrow \alpha(\alpha x+\beta)+\beta=4x+3 \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2x+\alpha\beta+\beta=4x+3 \Leftrightarrow \alpha^2x+\beta(\alpha+1)=4x+3$$

Δηλαδή α^2=4 και β(α+1)=3

$$\left.\begin{matrix}\alpha^2=4\\ \beta(\alpha+1)=3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha=2\\ \beta(2+1)=3\end{pmatrix} \text{ ή } \left.\begin{pmatrix}\alpha=-2\\ \beta(-2+1)=3\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha=2\\ \beta=1\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}\alpha=-2\\ \beta=-3\end{pmatrix}$$

Δηλαδή H(x)=2x+1 ή H(x)=-2x-3.

Θέμα 3ο:

Α. Έστω ότι έχει. Τότε P(ρ)=0 δηλαδή $5\rho^8+3\rho^4+2=0$ άτοπο εφόσον $5\rho^8+3\rho^4+2>0$ για κάθε ρ $\in\mathbb{R}$. Άρα το P(x) δεν έχει παράγοντα της μορφής x-ρ.

Β. Για το $P(x)=x^3-3x^2+4$ και για ρ=2 από το σχήμα Horner έχουμε:

1 ↓	-3 2	0 -2	4 -4	2
1	-1	-2	0	

Άρα από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$P(x)=\delta(x)\cdot\pi(x)$,δηλ $x^3-3x^2+4=(x-2)\cdot\left(x^2-x-2\right)$ (1)

Όπου π(x)=x^2-x-2.

Για το π(x)=x^2-x-2 και για ρ=2 από το σχήμα Horner έχουμε:

1 ↓	-1 2	-2 2	2
1	1	0	

Άρα από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε:

$\pi(x)=\delta_1(x)\cdot\pi_1(x)$ δηλ, $x^2-x-2=(x-2)\cdot(x+1)$ (2)

Άρα η (1) με βάση τη (2) γίνεται:

$x^3-3x^2+4=(x-2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+x\right)$ δηλ, $x^3-3x^2+4=(x-2)^2\cdot(x+1)$ άρα $(x-2)^2$ παράγοντας του $P(x)$.

Γ. $P(x)=x^3-2\alpha x+\beta+4$

i. Εφόσον το P(x) έχει παράγοντα το x έπεται ότι P(0)=0. Επίσης, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+1 είναι 3, άρα P(-1)=3. Επομένως:

$$\left.\begin{array}{l}P(0)=0\\P(-1)=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}0^3-2\alpha\cdot0+\beta+4=0\\(-1)^3-2\alpha\cdot(-1)+\beta+4=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\beta=-4\\-1+2\alpha+\beta+4=3\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\beta=-4\\\alpha=2\end{pmatrix}$$

ii. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x-1 είναι το P(1). Για α=2 και β=-4 είναι $P(x)=x^3-4x$. Άρα $P(1)=1^3-4\cdot 1=1-4=-3$

iii. Για να βρίσκεται η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) πάνω από την ευθεία ε πρέπει: P(x)>y δηλ.

$x^3-4x>x-2 \Leftrightarrow x^3-4x-x+2>0 \Leftrightarrow x^3-5x+2>0$ (1)

Λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση x^3-5x+2=0.

Πιθανές ακέραιες ρίζες σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή ±1, ±2. Για ρ=2 από το σχήμα Horner έχουμε:

1	0	-5	2	2
↓	2	4	-2	
1	2	-1	0	

Άρα, από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης η εξίσωση γίνεται: $(x-2)\left(x^2+2x-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

ή

$x^2+2x-1=0, \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=8>0$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2}=-1\pm\sqrt{2}$$

Για την ανίσωση (1) έχουμε:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		2		$+\infty$
x^3-5x+2		-	0	+	0	-	0	+	

Άρα $x^3-5x+2>0$ όταν $x\in(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})\cup(2,+\infty)$.

Θέμα 4ο:

Α. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{7x+1}=-\sqrt{x-1}$. Πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l}3x+1\geq 0\\7x+1\geq 0\\x-1\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x\geq -\frac{1}{3}\\x\geq -\frac{1}{7}\\x\geq 1\end{array}\right\}\Rightarrow x\geq 1.$$

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{7x+1}\right)^2\Leftrightarrow 3x+1+2\cdot\sqrt{(3x+1)(x-1)}+x-1=7x+1\Leftrightarrow$$
$$2\cdot\sqrt{(3x+1)(x-1)}=-x+1-3x-1+7x+1\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{(3x+1)(x-1)}=3x+1$$

Εφόσον $\sqrt{(3x+1)(x-1)}\geq 0$ πρέπει $3x+1\geq 0\Rightarrow x\geq -\frac{1}{3}$.

Τότε:

$$\left(2\sqrt{(3x+1)(x-1)}\right)^2=(3x+1)^2\Leftrightarrow 4(3x^2-3x+x-1)=9x^2+6x+1\Leftrightarrow$$
$$12x^2-8x-4=9x^2+6x+1\Leftrightarrow 3x^2-14x-5=0, \text{Τότε}:$$
$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=256, x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{14\pm 16}{6}$$

Άρα $x=5$ δεκτή ή $x=-\frac{1}{3}$ απορρίπτεται.

Β. $\frac{5x^3+1}{x^2-1}+\frac{3}{1-x}>1\Leftrightarrow \frac{5x^3+1}{(x-1)(x+1)}-\frac{3}{x-1}-1>0.$

Πρέπει $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

και

$x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$

Τότε: $\dfrac{5x^3+1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{3(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{1(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow$

$$\dfrac{5x^3+1-3x-3-\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{5x^3-x^2-3x-1}{(x-1)(x+1)}>0 \Leftrightarrow$$

$$\left(5x^3-x^2-3x-1\right)(x-1)(x+1)>0 \quad (1)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες της αντίστοιχης εξίσωσης:

$\left(5x^3-x^2-3x-1\right)(x-1)(x+1)=0$

•$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

•$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

•$5x^3-x^2-3x-1=0.$

Πιθανές ακέραιες ρίζες σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή ±1. Για ρ=1 από σχήμα Horner έχουμε:

5	-1	-3	-1	1
↓	5	4	1	
5	4	1	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$(x-1)\left(5x^2+4x+1\right)=0$ άρα

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

ή

$5x^2+4x+1=0.$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=16-4\cdot5\cdot1=16-20=-4<0$ δηλαδή δεν έχει ρίζες.

Για την ανίσωση(1) έχουμε:

x	-∞	- 1		1		+∞
Γ	-	‖	+	‖	+	

Άρα $\left(5x^3-x^2-3x-1\right)(x-1)(x+1)>0$ όταν $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Γ. $f(t)=t^3-2t^2+10t-20$

i. Για t=0 ο δύτης βρίσκεται σε βάθος:

$f(0)=0^3-2\cdot 0^2+10\cdot 0-20=-20$, δηλαδή σε βάθος 20 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

ii. Για να βγει στην επιφάνεια της θάλασσας σημαίνει ότι το βάθος στο οποίο θα βρίσκεται θα είναι μηδενικό. Άρα

$f(t)=0 \Leftrightarrow t^3-2t^2+10t-20=0 \Leftrightarrow$

$t^2(t-2)+10(t-2)=0 \Leftrightarrow \left(t^2+10\right)(t-2)=0 \Leftrightarrow$

$t^2+10=0 \Leftrightarrow t^2=-10$ αδύνατη.

ή

t-2=0 $\Leftrightarrow$ t=2

Άρα σε 2 h θα βγει στην επιφάνεια της θάλασσας.

iii. Εφόσον βρίσκεται σε βάθος 11m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας θα είναι:

$f(t)=-11 \Leftrightarrow t^3-2t^2+10t-20=-11 \Leftrightarrow t^3-2t^2+10t-9=0$

Πιθανές ακέραιες ρίζες σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του 9 δηλαδή ±1, ±3, ±9.

Για ρ=1 από το σχήμα Horner έχουμε:

1	-2	10	-9	1
↓	1	-1	9	
1	-1	9	0	

Άρα η εξίσωση γίνεται

$(t-1)\left(t^2-t+9\right)=0 \Leftrightarrow$

$t-1=0 \Leftrightarrow t=1$

ή

$t^2-t+9=0, \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 9<0$ αδύνατη

Άρα στη 1h ο δύτης βρίσκεται σε βάθος 11m κάτω από τη θάλασσα.