ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 77

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………….
Γεν. Παιδείας

Ύλη:Τριγωνομετρία
02/10/2011

Θέμα 1^o:

Α.i.Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική;

ii.Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

iii.Να μελετήσετε τη συνάρτηση f(x)=εφx

(3x5=15 μον.)

Β. Να σημειώσετε Σ ή Λ στις παρακάτω προτάσεις. Σε περίπτωση λανθασμένης αιτιολογείστε.

i.Η εξίσωση ημx=π είναι αδύνατη

ii.Η περίοδος της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\frac{\pi x}{2}$ ισούται με $\frac{\pi}{2}$

iii.Η συνάρτηση $f(x)=3+2\sigma\upsilon\nu 5x$ έχει μέγιστη τιμή 5.

iv.Η λύση της εξίσωσης συνx=0 είναι η $x=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$

v.Η f(x)=σφx έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Αν $\sigma\varphi\omega=-\frac{5}{12}$ και 270^o<ω<360^o, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω. **(5 μον.)**

Β. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x, για τις οποίες να ισχύει συγχρόνως $\eta\mu x=\frac{2}{3}$ και συνx=$\frac{1}{3}$ **(5 μον.)**

Γ.i.Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2}{\eta\mu\alpha}$

ii.Ομοίως: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$

iii.Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. ημx·συνx **β.** ημ^{2}x + συν^{2}x

(3x5=15μον.)

Θέμα 3ο:

Α. Να απλοποιήσεις τις παραστάσεις:

$$\mathrm{A}=\frac{\eta\mu(\frac{3\pi}{2}+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\theta)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{2}+\theta)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\theta)}$$

$$\mathrm{B}=\eta\mu^2(13\pi+\omega)+\eta\mu^2(\frac{11\pi}{2}+\omega)$$

(2x7,5=15μον.)

Β. Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}=1$$

(10 μον.)

Θέμα 4ο:

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu\frac{x}{3}$

i. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.
ii.Να βρείτε την περίοδο της f.
iii.Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f στο[0,6π].
iv.Να βρείτε τη μονοτονία της f σε διάστημα μιας περιόδου.
v.Να λύσετε γραφικά την εξίσωση f(x)=0 στο [0,6π].

(5x2=10μον.)

Β. Να λύσεις τις εξισώσεις:

i. $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, συνx= $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}\sigma\varphi x-\sqrt{6}=0$

ii. $\sigma\upsilon\nu^2 x+\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu x-1=0$ **,** στο [0,2π].

iii. $\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi(x-\frac{\pi}{3})$

(3x5=15μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1^o:

Α. i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός T>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

α. $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

β. $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

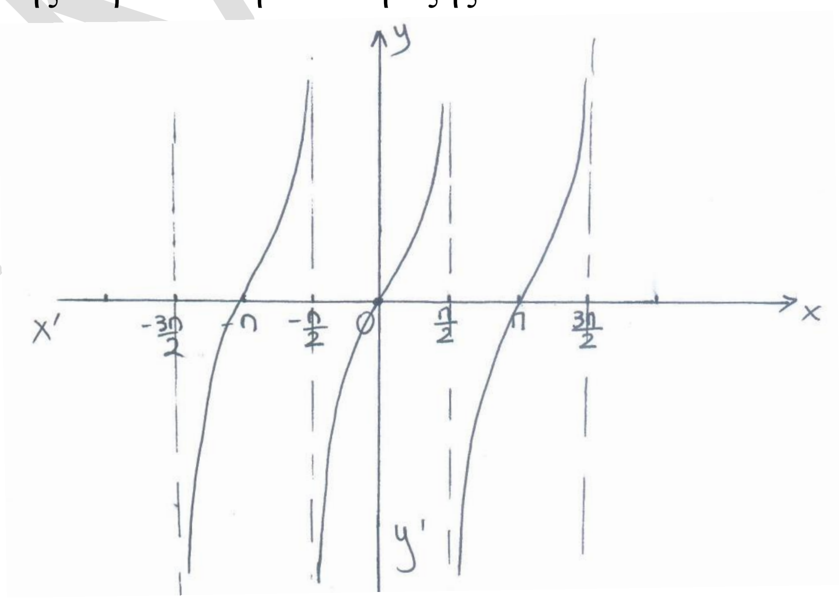
Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

ii. Είναι:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

iii. $f(x) = \varepsilon\varphi(x)$

- Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} \setminus \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$
- Η f έχει σύνολο τιμών το $B = \mathbb{R}$
- Η f είναι περιττή εφόσον $f(-x) = \varepsilon\varphi(-x) = -\varepsilon\varphi x = -f(x)$ οπότε έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- Η f είναι περιοδική με περίοδο T= π
- Η f δεν έχει μέγιστη, ούτε ελάχιστη τιμή
- Η f είναι γνησίως αύξουσα κατά διαστήματα
- Έχει ασύμπτωτες τις $x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$
- Η γραφική της παράσταση είναι η εξής:



Β. i. Σωστό, εφόσον $-1 \le \eta\mu x \le 1$.

ii. Λάθος, εφόσον $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{|\lambda|} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$

iii. Σωστό, εφόσον η μέγιστη τιμή του ημx είναι 1.

iv. Σωστό.

v. Λάθος, έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A} = \mathbb{R} \setminus \{\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

Θέμα 2ο:

Α.

- $\sigma\varphi\omega = -\frac{5}{12}$
- $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}$
- $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+(-\frac{12}{5})^2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\frac{144}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{25}{25}+\frac{144}{25}} \Leftrightarrow$

  $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{169}{25}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{25}{169}$

  Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$.

  Όμως $270^o < \omega < 360^o$ άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{5}{13}$.

- $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + (\frac{5}{13})^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{169-25}{169} \Leftrightarrow$

  $\eta\mu^2\omega = \frac{144}{69} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$

  και εφόσον $270^o < \omega < 360^o$ άρα $\eta\mu\omega = -\frac{12}{13}$.

Β. Έστω ότι υπάρχει τέτοιο x. Τότε γνωρίζουμε ότι:

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ δηλαδή $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} = 1$. Άτοπο.

Άρα δεν υπάρχουν τιμές του x, ώστε $\eta\mu x = \frac{2}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$.

Γ.i. Θα δείξουμε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{2}{\eta\mu\alpha}$

$$\frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\eta\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)+\eta\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)}{(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)}=$$

$$\frac{\eta\mu\alpha-\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha+\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{2\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\frac{2\eta\mu\alpha}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{2}{\eta\mu\alpha}$$

ii. Θα δείξουμε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\varepsilon\varphi\beta+\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\frac{\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1}{\varepsilon\varphi\beta}}{\frac{\varepsilon\varphi\beta\cdot\varepsilon\varphi\alpha+1}{\varepsilon\varphi\alpha}}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\cdot(\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1)}{\varepsilon\varphi\beta\cdot(\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta+1)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

iii. Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$.

α. $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\eta\mu^2 x+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ άρα

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=1+2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\frac{1}{4}-1=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow 2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{8}.$$

β. $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{6}{8}=\frac{8}{8}=1.$

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. $$\mathrm{A}=\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi-\theta)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\varphi(-\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\frac{(-\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot(-\eta\mu\theta)\cdot(-\varepsilon\varphi\theta)}{(-\eta\mu\theta)\cdot(-\sigma\varphi\theta)\cdot(-\varepsilon\varphi\theta)}=\frac{(\sigma\upsilon\nu\theta)}{(\sigma\varphi\theta)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}}$$

$$=\frac{\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\eta\mu\theta$$

$$\mathrm{B}=\eta\mu^2(13\pi+\omega)+\eta\mu^2\left(\frac{11\pi}{2}+\omega\right)=\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1.$$

Β. Εφόσον Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου, έπεται ότι:

$$\hat{\mathrm{A}}+\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}=180^o\Leftrightarrow\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}+\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}=90^o\Leftrightarrow\frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}=90^o-\frac{\hat{\mathrm{B}}+\hat{\Gamma}}{2}$$

Άρα $\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}=\varepsilon\varphi\left[90-\frac{(\mathrm{B}+\Gamma)}{2}\right]=\sigma\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right).$

Άρα $\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\frac{\mathrm{B}+\Gamma}{2}\right)=1.$

Θέμα 4°:

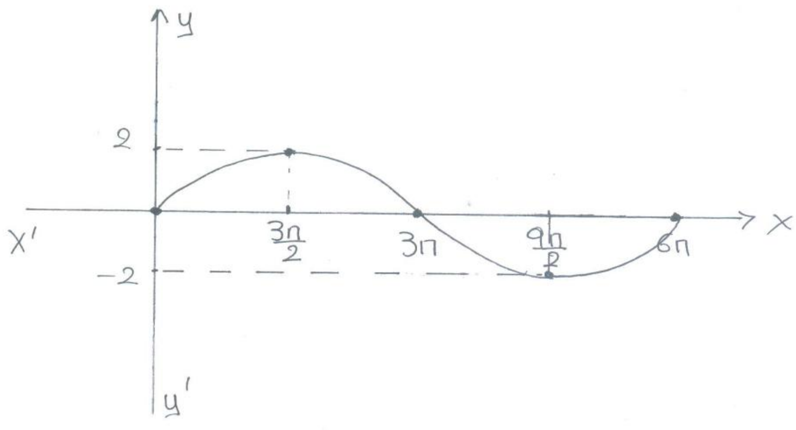
Α. $f(x)=2\eta\mu\frac{x}{3}$

i. Η μέγιστη τιμή της f είναι το 2.
Η ελάχιστη τιμή της f είναι το -2.

ii. $T=\frac{2\pi}{|\lambda|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$, $\beta=\frac{T}{4}=\frac{6\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$.

iii.

x	0	$\frac{3\pi}{2}$	3π	$\frac{9\pi}{2}$	6π
$\frac{x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu\frac{x}{3}$	0	1	0	-1	0
$2\eta\mu\frac{x}{3}$	0	2	0	-2	0



iv. ↗ στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

↘ στο $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{9\pi}{2}\right]$

↗ στο $\left[\frac{9\pi}{2},6\pi\right]$.

v. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή x=3π ή x=6π

B. i.

- $\eta\mu x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}$ ή $x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$
- $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow$

  $x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

ii. $\sqrt{2}\sigma\varphi x-\sqrt{6}=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sigma\varphi x=\sqrt{6}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$\sigma\varphi x=\sigma\varphi\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

iii. $\sigma\upsilon\nu^2x+\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu x-1=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x+3\sigma\upsilon\nu x-2=0$.

Έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=3^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25>0$,

άρα $\sigma\upsilon\nu x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-3\pm 5}{4}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x=-2$ ή $\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$

Η $\sigma\upsilon\nu x=-2$ είναι αδύνατη ($-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$), οπότε έχουμε

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Όμως θέλουμε στο $[0,2\pi]$.

Άρα για κ=0 έχουμε $x=\frac{\pi}{3}$ ή $x=-\frac{\pi}{3}$ απορ.

για κ=1 έχουμε $x=2\pi+\frac{\pi}{3}$ απορ. ή $x=2\pi-\frac{\pi}{3}$

για κ=2 έχουμε $x=4\pi+\frac{\pi}{3}$ απορ. ή $x=4\pi-\frac{\pi}{3}$ απορ.

iv. $\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Για να έχει νόημα η παράσταση πρέπει:

$\sigma\upsilon\nu 2x\neq 0$ και $\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0$ άρα:

$2x\neq\kappa\pi\pm\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq\frac{2\kappa\pi\pm\pi}{4}$ και $x-\frac{\pi}{3}\neq\kappa\pi\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$.

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\varepsilon\varphi 2x=\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 2x=\varepsilon\varphi\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)\Leftrightarrow$$

$$2x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}-x\Leftrightarrow 3x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{6}\Leftrightarrow 18x=6\kappa\pi+5\pi\Leftrightarrow x=\frac{6\kappa\pi+5\pi}{18},\ \kappa\in\mathbb{Z}$$