ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

67

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη:Ευθεία **19-1-2019**

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1.Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής: $Ax+By+\Gamma=0$ με $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ **(μον.13)**

Α2.Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

1.Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}=$........

2.Η εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι: ....

3.Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0,y_0)$ και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ έχει εξίσωση: .... **(μον.6)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) ή (Λ)

1.Αν $A\neq 0$ ή $B\neq 0$ η $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία. Σ Λ

2.Η εξίσωση $y=|x|$ παριστάνει τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων. Σ Λ

3.Η ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$ είναι κάθετη στο $\vec{\delta}=(A, B)$. Σ Λ

(μον.6)

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-1,2)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(3,-2)$. Βρείτε:

Β1. την εξίσωση του ύψους ΑΔ **(μον.8)**

Β2. την εξίσωση της διαμέσου ΒΕ **(μον.8)**

Β3. την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο τομής Κ των ευθειών ΑΔ και ΒΕ και είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ.

(μον.9)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha^2+2\alpha)x-(\alpha^2+\alpha+1)y-\alpha^2-2=0,\ \alpha\in R$ **(1)**

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha\in R$ η (1) παριστάνει ευθεία. **(μον.7)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο. **(μον.6)**

Γ3. Να βρείτε εκείνη την ευθεία (ε) που ορίζεται από την εξίσωση (1) και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon': x-y+3=0$ **(μον.6)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η ευθεία η: y=2x δεν ανήκει στην οικογένεια των ευθειών που ορίζεται από την εξίσωση (1). **(μον.6)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda-1)x+\lambda y=3\lambda$ και $\varepsilon_2: \lambda x+(\lambda+1)y=3\lambda+1$

Δ1. Να δείξετε ότι ε_1 και ε_2 τέμνονται για κάθε $\lambda\in R$. **(μον.7)**

Δ2. Να δείξετε ότι το σημείο τομής Μ των ε_1 και ε_2 βρίσκεται στην ευθεία $\eta: y=-x+1$ **(μον.6)**

Δ3. Αν $A(-1,2)$ να βρείτε σημείο Β της ευθείας (η), που να απέχει από την ευθεία ΟΑ απόσταση ίση με $\sqrt{5}$. **(μον.6)**

Δ4. Να βρείτε σημείο Ν της ευθείας (η) ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΝΑΟ να είναι 2. **(μον.6)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. **1.** $\vec{\delta}=(B,-A)$ **2.** $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ **3.** $x=x_0$

Α3. **1** Σ **2** Σ **3** Σ

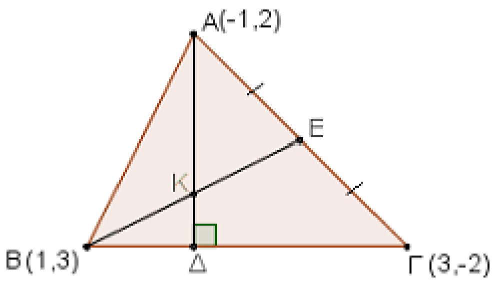
ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή $A\Delta\perp B\Gamma\Rightarrow\lambda_{A\Delta}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1$

$$\Rightarrow\lambda_{A\Delta}\cdot\frac{-2-3}{3-1}=-1\Rightarrow\lambda_{A\Delta}=\frac{2}{5}$$

οπότε $A\Delta: y-2=\frac{2}{5}(x+1)\Rightarrow$

$A\Delta: 2x-5y+12=0$



Β2. Αφού το Ε είναι μέσο της ΑΓ θα είναι $E\left(\frac{-1+3}{2},\frac{2-2}{2}\right)\Rightarrow E(1,0)$.

Τα σημεία Ε και Β έχουν την ίδια τετμημένη $x=1$. Η ΒΕ επομένως είναι κατακόρυφη και έχει εξίσωση $BE: x=1$.

Β3. Η ΑΔ για $x=1$ γίνεται $2\cdot1-5y+12=0\Leftrightarrow y=\frac{14}{5}$.Αρα $K\left(1,\frac{14}{5}\right)$.

Η παράλληλη απ' το Κ στην ΒΓ, έστω (ε),έχει $\lambda_{\varepsilon}=\lambda_{B\Gamma}=\frac{-2-3}{3-1}=-\frac{5}{2}$

οπότε $\varepsilon: y-\frac{14}{5}=-\frac{5}{2}(x-1)\Rightarrow$ $\varepsilon: 25x+10y-53=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η (1) είναι της μορφής
$Ax+By+\Gamma=0$ με Α=$\alpha^2+2\alpha$ και Β=$-(\alpha^2+\alpha+1)$. Το $\alpha^2+\alpha+1$ έχει $\Delta=-3<0$ άρα δεν μηδενίζεται για κανένα α.
Η (1) λοιπόν είναι ευθεία.

Γ2. Η (1) γράφεται $\alpha^2x+2\alpha x-\alpha^2y-\alpha y-y-\alpha^2-2=0 \Leftrightarrow$
$(x-y-1)\alpha^2+(2x-y)\alpha-y-2=0,\ \forall\alpha\in R$, οπότε θα είναι:

$$\left.\begin{array}{r} x-y-1=0 \\ 2x-y=0 \\ -y-2=0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} -1-(-2)-1=0 \\ x=-1 \\ y=-2 \end{array}\right|$$

. Αρα η (1) είναι οικογένεια ευθειών που διέρχονται απ' το σημείο $M(-1,-2)$

Γ3. Η κάθετη στην (ε΄) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-1$ οπότε πρέπει

$$\lambda_\alpha=-1 \Rightarrow -\frac{\alpha^2+2\alpha}{-(\alpha^2+\alpha+1)}=-1 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha=-\alpha^2-\alpha-1 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2+3\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=-1 \text{ ή } \alpha=-\frac{1}{2}.$$

Για $\alpha=-1$ ή $\alpha=-\frac{1}{2}$ η (1) δίνει την $x+y+3=0$.

<u>2</u>

2ος τρόπος
Η κάθετη στην (ε΄) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-1$.Αφού είναι ευθεία της οικογένειας (1) διέρχεται απ' το σημείο $M(-1,-2)$.Εχει λοιπόν εξίσωση $y-(-2)=-1(x+1)$ δηλ. x+y+3=0

Γ4. Η $y=2x$ διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων.
Η (1) διέρχεται απ' την αρχή των αξόνων αν $-\alpha^2-2=0$,αδύνατο.
Καμία λοιπόν ευθεία της (1) δεν διέρχεται απ' το Ο.
Η y=2x επομένως δεν ανήκει στην οικογένεια της (1).

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Το σύστημα των ε_1 και ε_2,

έχει: $D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) - \lambda^2 = -1 \neq 0$ οπότε έχει μοναδική λύση. Αρα οι ευθείες τέμνονται για κάθε $\lambda \in R$.

Δ2. Είναι: $D_x = \begin{vmatrix} 3\lambda & \lambda \\ 3\lambda + 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 3\lambda - 3\lambda^2 - \lambda = 2\lambda$ και

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + \lambda - 3\lambda - 1 - 3\lambda^2 = -2\lambda - 1$.

Το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 είναι το

$M\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{\delta}\right)$ δηλ. $M\left(\dfrac{2\lambda}{-1}, \dfrac{-2\lambda - 1}{-1}\right)$ δηλ. $M(-2\lambda, 2\lambda + 1)$ το οποίο επαληθεύει την $\eta : y = -x + 1$ γιατί $2\lambda + 1 = -(-2\lambda) + 1$.

Το Μ λοιπόν είναι σημείο της (η).

Δ3. Το σημείο Β(α,β) ανήκει στην (η) άρα την επαληθεύει

δηλ. $\beta = -\alpha + 1$ (1)

Η ΟΑ έχει εξίσωση $OA : y = -2x$

δηλ. $OA : 2x + y = 0$.

Είναι: $d(B, OA) = \sqrt{5} \Rightarrow$

$\dfrac{|2\alpha + \beta|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \Rightarrow |2\alpha + \beta| = 5 \Rightarrow$

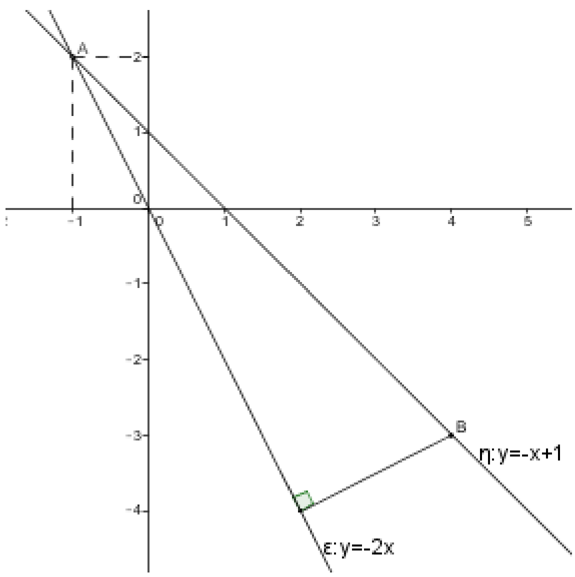
$2\alpha + \beta = 5$ (2) ή $2\alpha + \beta = -5$ (3)

Από (1) και (2) είναι $\alpha = 4,\ \beta = -3$

άρα $B(4, -3)$

Από (1) και (3) είναι $\alpha = -6,\ \beta = 7$

άρα $B(-6, 7)$.



Δ4.Εστω $N(\kappa,\lambda)\in(\eta)$ άρα $\lambda=-\kappa+1$ (1)

Επίσης $\overrightarrow{ON}=(\kappa,\lambda)$, $\overrightarrow{OA}=(-1,2)$. Αφού $(NAO)=2\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OA})\right|=2\Rightarrow\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\kappa & \lambda\\ -1 & 2\end{matrix}\right\|=2\Rightarrow\left|2\kappa+\lambda\right|=4\Leftrightarrow$$

$2\kappa+\lambda=4$ (2) ή $2\kappa+\lambda=-4$ (3) .

Από (1) και (2) είναι $\kappa=3$, $\lambda=-2$ άρα $N(3,-2)$.

Από (1) και (3) είναι $\kappa=-5$, $\lambda=6$ άρα $N(-5,6)$.