ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **6**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **ΕΠΑ.Λ.**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία **06-11-16**

Θέμα 1ο:

Α.i. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(4 μον.)**

ii. Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται περιττή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

iii. Να κατασκευάσετε ένα πινακάκι με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. **(6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η εξίσωση $7x - 3y^2 = 4$ είναι γραμμική. **Σ** **Λ**

ii. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση τότε $D \neq 0$. **Σ** **Λ**

iii. Το σύστημα $\left.\begin{aligned} 7x - 3y &= 9 \\ -5x + 4y &= 11 \end{aligned}\right\}$ είναι προτιμότερο να το λύσουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **Σ** **Λ**

iv. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. **Σ** **Λ**

v. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ\left(Α = 90^\circ\right)$ ισχύει ότι $ημB = \dfrac{ΑΓ}{ΒΓ}$. **Σ** **Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2ο: Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 9 \\ 3x - 7y &= 1 \end{aligned}\right\}$.

Α. Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

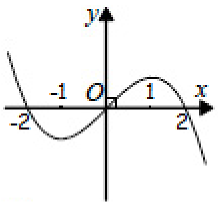
Γ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

Δ. Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

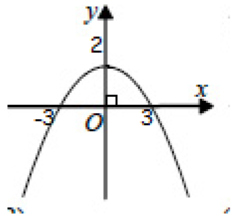
<u>Θέμα 3^{ο}:</u>

Α. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες.

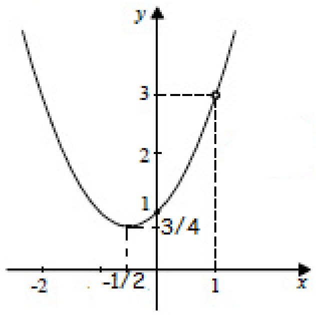
i.



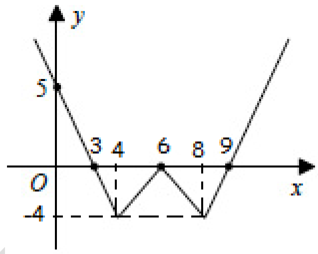
ii.



iii.



iv.



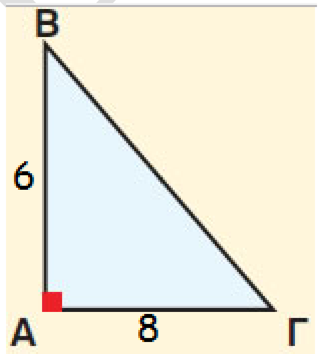
(4x4=16 μον.)

Β. Να παραστήσετε γραφικά σε ένα σύστημα συντεταγμένων, τις συναρτήσεις:

$\varphi(x)=|x|$, $\quad f(x)=|x|+2$, $\quad g(x)=|x-3|$ **(9 μον.)**

<u>Θέμα 4^{ο}:</u>

Α. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών Β και Γ του παρακάτω σχήματος.

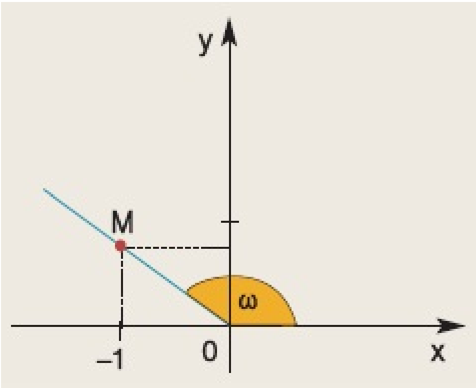


(12 μον.)

Β. Στο παρακάτω σχήμα είναι $εφω = -\frac{3}{4}$. Αν η τετμημένη του σημείου Μ είναι -1, τότε να υπολογίσετε:

i. Την τεταγμένη του σημείου Μ.

ii. Το ημω και το συνω. **(2x4=8 μον.)**



Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$Α = 2ημ\frac{π}{6} - 2συν\frac{π}{3} + εφ\frac{π}{4} \cdot σφ\frac{π}{6}$$ **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^o:

Α. i. Γραμμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής
$\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

ii. Μία συνάρτηση f λέγεται περιττή σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x \in \Delta$ το $-x \in \Delta$, και ισχύει
ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$.

iii.

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

Β. **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2^{o}:

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\}(\Sigma)$

Α. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x+2y=9$ και $\varepsilon_2 : 3x-7y=1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

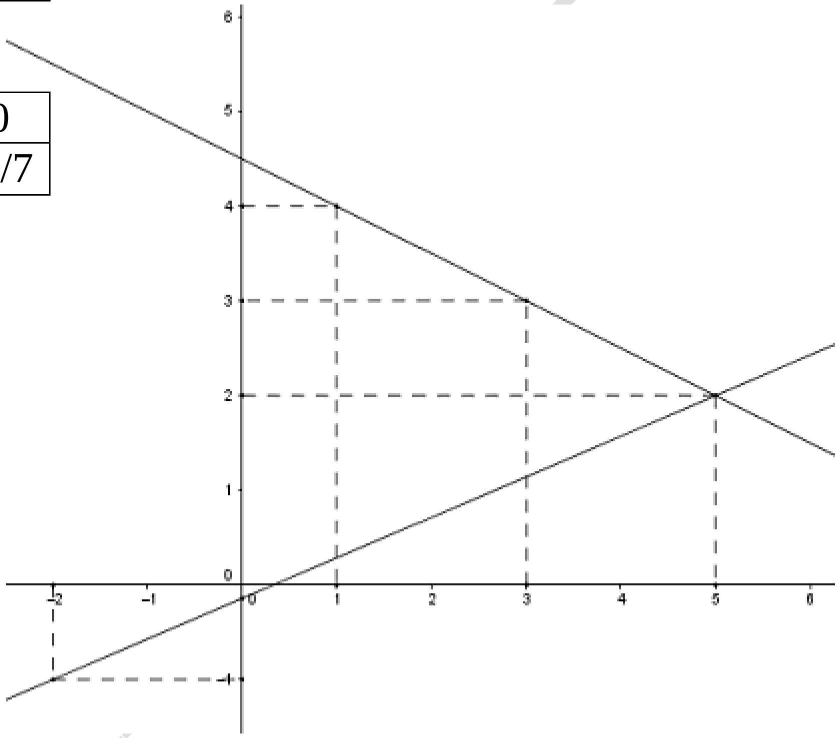
ε_1:

x	1	3
y	4	3

ε_2:

x	-2	0
y	-1	-1/7

Άρα έχουμε:



Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Β.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ 3(-2y+9)-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y+27-7y=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -6y-7y=1-27 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ -13y=-26 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2y+9 \\ \dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2\cdot 2+9 \\ y=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right).$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Γ.

$$\left.\begin{array}{l}x+2y=9\\3x-7y=1\end{array}\right\}\overset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}-3x-6y=-27\\3x-7y=1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}-13y=-26\\x+2y=9\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{-13y}{-13}=\dfrac{-26}{-13}\\x+2y=9\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}y=2\\x+2\cdot 2=9\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=2\\x=5\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή (x,y)=(5,2).

Δ. Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{array}{l}x+2y=9\\3x-7y=1\end{array}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & -7\end{vmatrix}=-7-6=-13\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

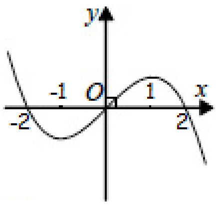
Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$$D_x=\begin{vmatrix}9 & 2\\1 & -7\end{vmatrix}=-63-2=-65 \text{ και } D_y=\begin{vmatrix}1 & 9\\3 & 1\end{vmatrix}=1-27=-26$$

Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\dfrac{D_x}{D},\dfrac{D_y}{D}\right)=\left(\dfrac{-65}{-13},\dfrac{-26}{-13}\right)=(5,2)$.

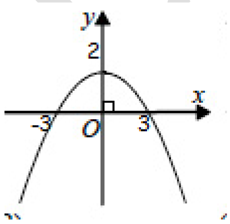
<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.i.



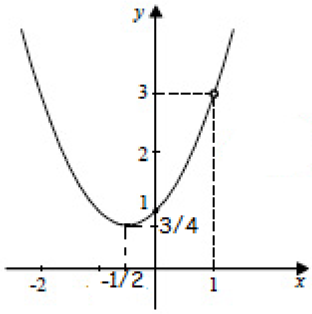
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Δεν παρουσιάζει ολικά ακρότατα. Είναι περιττή εφόσον έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

ii.



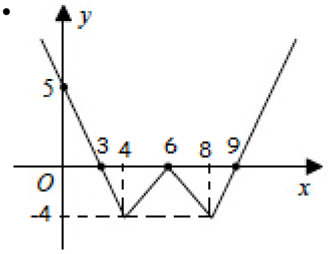
Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 2 για x=0. Είναι άρτια διότι έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

iii.



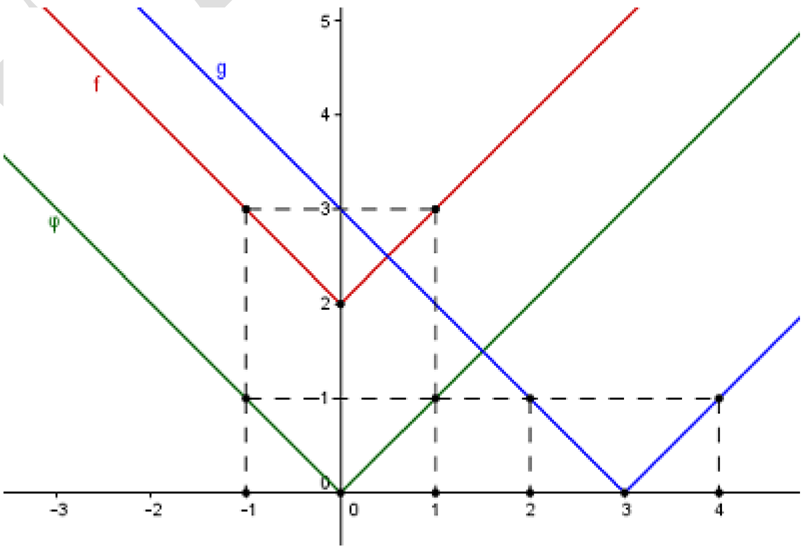
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $\frac{3}{4}$ για $x=-\frac{1}{2}$. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iv.



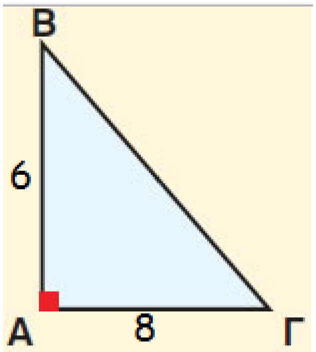
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,4]$, γνησίως αύξουσα στο $[4,6]$, γνησίως φθίνουσα στο $[6,8]$ και γνησίως αύξουσα στο $[8,+\infty)$.Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -4 για x=4 και για x=8. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

B. Έχουμε τις συναρτήσεις $\varphi(x)=|x|$, $f(x)=|x|+2$ και $g(x)=|x-3|$.
Η f είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες πάνω και η g μετατόπιση της φ κατά 3 μονάδες δεξιά.



Θέμα 4^{ο}:

Α.



Από Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow B\Gamma^2 = 100 \Leftrightarrow$

$B\Gamma = \sqrt{100} \Leftrightarrow B\Gamma = 10$. Τότε:

$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

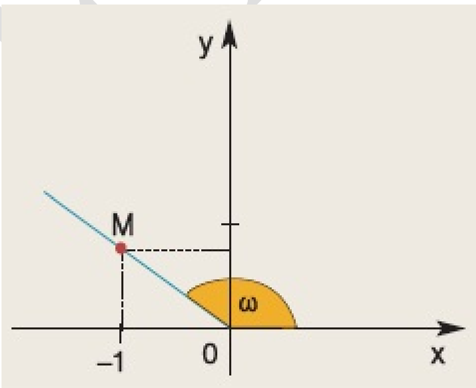
$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Ομοίως είναι: $\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$,

$\varepsilon\varphi\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ και $\sigma\varphi\Gamma = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Β. i.



Έχουμε: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = \frac{y}{-1} \Leftrightarrow$

$4y = 3 \Leftrightarrow \mathbf{y = \frac{3}{4}}$.

Επομένως η τεταγμένη του σημείου Μ είναι $\frac{3}{4}$.

ii. Είναι: $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{16}{16}+\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

Άρα, $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{3}{5}$ και

$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}=\frac{-1}{\frac{5}{4}}=-\frac{4\cdot 1}{5\cdot 1}=-\frac{4}{5}$.

Γ. $A=2\eta\mu\frac{\pi}{6}-2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\sigma\varphi\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\sqrt{3}$

$A=2-2+\sqrt{3}=\sqrt{3}.$