

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

6

Ον/μο:.....

Γ' Λυκείου(Ε.Π.Α.Λ)

Υλη: Στατιστική , Όριο-Συνέχεια

18-02-13

Συνάρτησης , Διαφορικός Λογισμός

Θέμα 1^ο:

- A.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 ; (7 μον.)
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 ; (6 μον.)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- i.** Αν $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ τότε $f'(x) = 2x \cdot \frac{1}{x}$. Σ Λ
- ii.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1} = 2$. Σ Λ
- iii.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 . Σ Λ
- iv.** Η μέση τιμή και η διάμεσος είναι μέτρα θέσης . Σ Λ
- (4x3=12 μον.)**

Θέμα 2^ο:

- A.** Να γράψετε τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο . (10 μον.)
- B.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. (2x5=10 μον.)
- Γ.** Να δείξετε ότι η διακύμανση είναι $s^2 = 49$. (5 μον.)

ΤΙΜΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ		ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
x_i	v_i	f_i	$f_{i\%}$	N_i
1	10			
2				35
3				
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100	

Θέμα 3^ο:

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \frac{\beta x^2 + \alpha x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

A. Υπολογίστε τους αριθμούς : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $f(0)$.

(3x5=15 μον.)

B. Να βρείτε τους αριθμούς α , β , ώστε η f να είναι συνεχής .

(10 μον.)

Θέμα 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$.

A. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f . **(8 μον.)**

B. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία . **(9 μον.)**

Γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα καθώς και τις τιμές τους . **(8 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο x_0 , το οποίο περιέχεται στο πεδίο ορισμού της όταν :

1. Υπάρχει το όριο : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (δηλαδή τα πλευρικά όρια στο x_0

είναι ίσα και επιπλέον :

2. Το όριο ισούται με $f(x_0)$ [δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$].

B. Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , όταν υπάρχει το όριο : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός .

Γ. i. Λ ii. Λ iii. Λ iv. Σ

Θέμα 2^ο:

A. Αφού $N_1 = v_1 = 10$ και $N_2 = v_1 + v_2 = 35$, θα είναι $v_2 = 25$.

Έτσι $v_3 = 50 - 35 = 15$. Ο μαγικός αριθμός είναι $2 (50 \cdot 2 = 100)$,
 οπότε $f_1 \% = 10 \cdot 2 = 20$, $f_2 \% = 25 \cdot 2 = 50$, $f_3 \% = 15 \cdot 2 = 30$.

Η στήλη f_i συμπληρώνεται διαιρώντας τους αριθμούς της $f_i \%$ με 100 :

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	$v_i \cdot x_i$
1	10	0,2	20	10	10
2	25	0,5	50	35	50
3	15	0,3	30	50	45
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$	1	100		105

B. Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{105}{50} = 2,1$

Η διάμεσος είναι $\delta = \frac{2+2}{2} = 2$, αφού ο 25^{ος} και ο 26^{ος} αριθμός

της σειράς είναι 2: $\underbrace{1,1,\dots,1}_{\substack{1ος-10ος \\ (10 \text{ αριθμ.})}}, \underbrace{2,2,\dots,2}_{\substack{11ος-35ος \\ (25 \text{ αριθμ.})}}, \underbrace{3,3,\dots,3}_{\substack{36ος-50ος \\ (15 \text{ αριθμ.})}}$

Γ. Είναι $\bar{x} = 2,1$ οπότε έχουμε :

x_i	v_i	$(\bar{x} - x_i)^2$	$v_i \cdot (\bar{x} - x_i)^2$
1	10	1,21	12,10
2	25	0,01	0,25
3	15	0,81	12,14
ΣΥΝΟΛΟ	$v=50$		24,5

$$\text{Έτσι } s^2 = \frac{24,5}{50} = 0,49$$

Θέμα 3^ο:

A.
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\alpha x + \beta) = \alpha \cdot 0 + \beta = \beta \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\beta x^2 + \alpha x}{x} \stackrel{\text{μορφή } \left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(\beta x + \alpha)}{x} = \beta \cdot 0 + \alpha = \alpha \end{cases}$$
 και $f(0)=2$ (από τον τύπο της f , μεμονωμένα)

B. Έστω ότι η f είναι συνεχής .

Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ είναι έτσι κι αλλιώς συνεχής , αφού :

- για $x < 0$: $f(x) = \alpha x + \beta$ (πολυωνυμική)
- για $x > 0$: $f(x) = \frac{\beta x^2 + \alpha x}{x}$ (πηλίκο πολυωνύμων)

Θα είναι όμως συνεχής και στο σημείο $x_0=0$, πράγμα που σημαίνει ότι : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,

δηλαδή με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (α) : $\beta = \alpha = 2$, που είναι οι ζητούμενες τιμές .

Θέμα 4^ο:

$$\begin{aligned}
 \text{A. } f'(x) &= (-2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2})' = \\
 &= -2x^3' - (3x^2)' + (12x)' + (\sqrt{2})' = \\
 &= -2(x^3)' - 3(x^2)' + 12(x)' + 0 = \\
 &= -2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 12 \cdot 1 + 0
 \end{aligned}$$

Τελικά είναι $f'(x) = -6x^2 - 6x + 12$

$$\begin{aligned}
 \text{B. Έστω } f'(x) = 0, \text{ οπότε } -6x^2 - 6x + 12 = 0 &\Leftrightarrow \\
 -6(x^2 + x - 2) = 0 &\Leftrightarrow \\
 x^2 + x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \\
 x = 1 \text{ ή } x = -2
 \end{aligned}$$

Ο πίνακας προσήμου της f' είναι :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'	-	○	+	○	-
f	↘		↗		↘

Η συνάρτηση είναι :

- γνησίως φθίνουσα στο $-\infty, -2$
- γνησίως αύξουσα στο $-2, 1$ και
- γνησίως φθίνουσα στο $1, +\infty$

Γ. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = -2$ **τοπικό ελάχιστο** , και στο $x_2 = 1$, **τοπικό μέγιστο** .

Δ. Το τοπικό ελάχιστο είναι :

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= -2(-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + \sqrt{2} = \\
 &= -2 \cdot (-8) - 3 \cdot 4 - 24 + \sqrt{2} = 16 - 12 - 24 + \sqrt{2} = \\
 &= \sqrt{2} - 20 .
 \end{aligned}$$

Το τοπικό μέγιστο είναι :

$$\begin{aligned}
 f(1) &= -2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + \sqrt{2} = \\
 &= -2 - 3 + 12 + \sqrt{2} = \sqrt{2} + 7 .
 \end{aligned}$$