ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 49

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου

Ύλη: Τρίγωνα 03-11-18

Θέμα 1ο:

Α. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο; Να αναφέρετε τρεις βασικούς γεωμετρικούς τόπους που γνωρίζετε. **(6 μον.)**

Β. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος. **Σ Λ**

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

iii. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. **Σ Λ**

iv. Κάθε χορδή ενός κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου του κύκλου. **Σ Λ**

v. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β και γ ισχύει $α-β<γ<α+β$. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΑΒ και ΑΓ, παίρνουμε σημεία Δ, Ε έτσι ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ. **(13 μον.)**

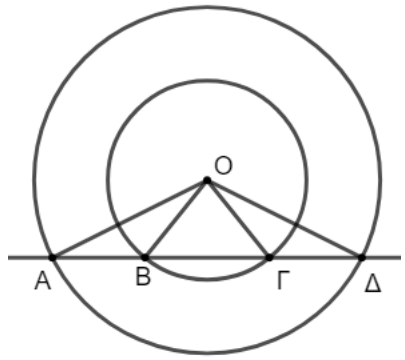
Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε έτσι ώστε ΑΒ=ΒΔ και ΑΓ=ΓΕ. Να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ του τριγώνου. **(12 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Στο διπλανό σχήμα το Ο είναι το κέντρο των δύο κύκλων. Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ=ΓΔ. **(6 μον.)**

ii. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ. **(7 μον.)**



Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

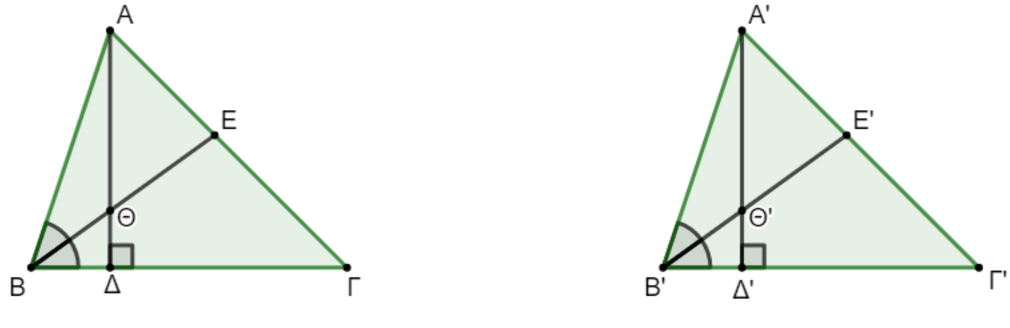
i. $\widehat{MAB} > \widehat{MA\Gamma}$. **(5 μον.)**

ii. $\dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. **(4 μον.)**

iii. $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$ όπου $\left(\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)$. **(3 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Έστω δύο ίσα οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και $A'B'\Gamma'$. Το ύψος ΑΔ και η διχοτόμος ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Θ, ενώ το αντίστοιχο ύψος $A'\Delta'$ και η αντίστοιχη διχοτόμος $B'E'$ του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ τέμνονται στο σημείο Θ' .

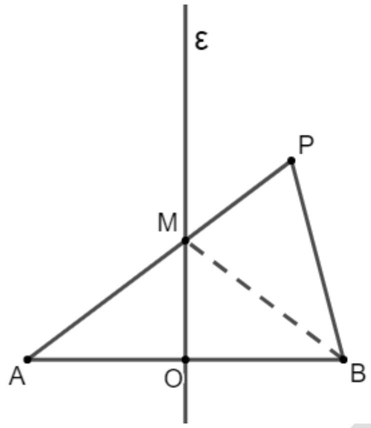


Να αποδείξετε ότι:

i. $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$. **(10 μον.)**

ii. $\Theta E = \Theta' E'$. **(10 μον.)**

Β. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και η μεσοκάθετός του ε. Στο ημιεπίπεδο (ε, Β) παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Ρ που δεν ανήκει στην ευθεία ε. Να δείξετε ότι ΡΑ>ΡΒ.



(5 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

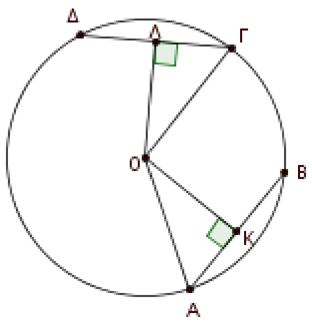
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

Α. Γεωμετρικό τόπο ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μία κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Τρεις βασικοί γεωμετρικοί τόποι είναι η μεσοκάθετος, η διχοτόμος και ο κύκλος.

Β. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν:
*Δύο πλευρές ίσες μία προς μία αντίστοιχα ή
* Μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία,
τότε είναι ίσα.

Γ.



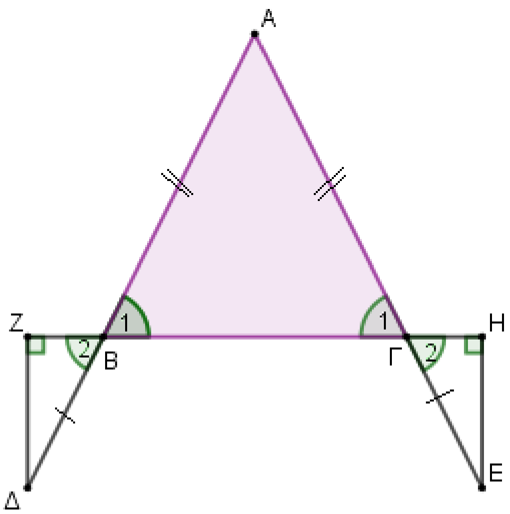
($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ).
Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ

Δ. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2ο:

Α.

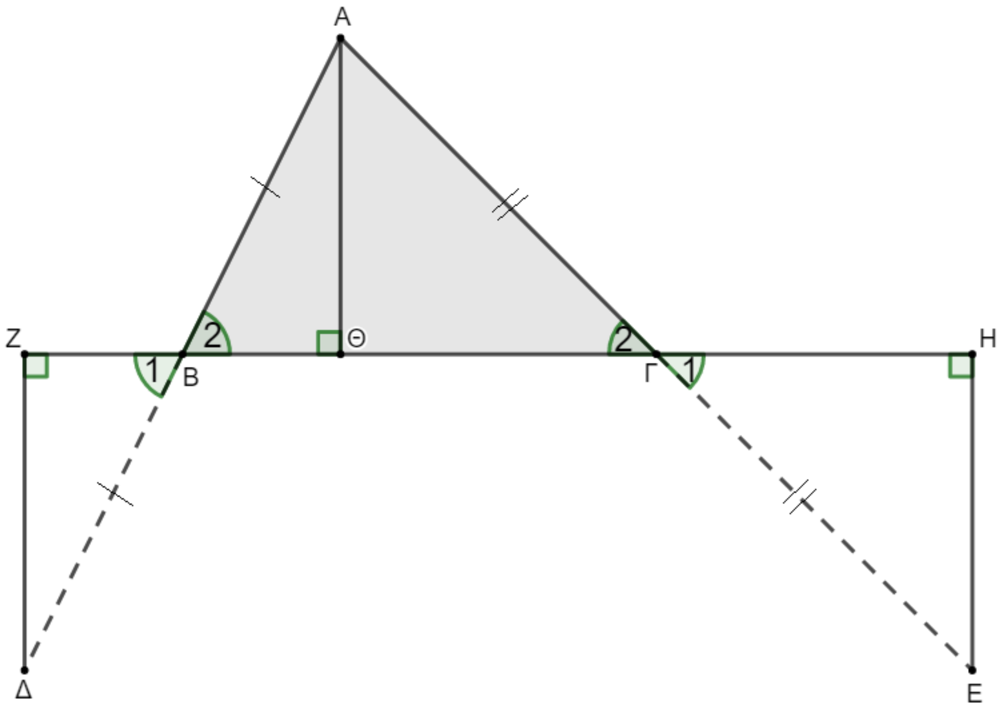


Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΒ, ΓΗΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{B}_2 = \Gamma_2\left(\text{ως κατακορυφήν των } \mathrm{B}_1 = \Gamma_1\right) \\ 2.\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{E}(\Upsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή ΖΔ=ΕΗ. Οπότε τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

Β.



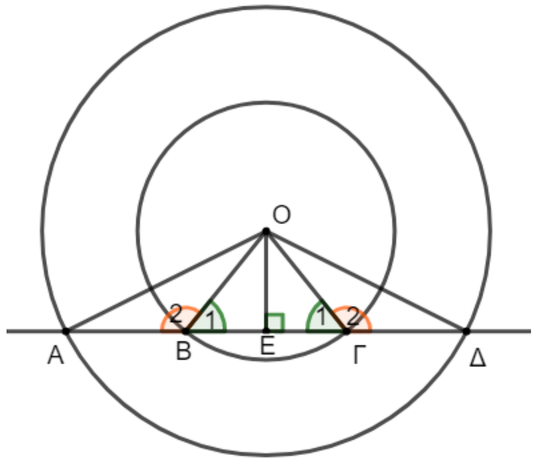
Φέρουμε το ύψος ΑΘ του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε:
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ και ΑΒΘ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2\left(\text{ως κατακορυφήν}\right) \\ 2.\mathrm{B}\Delta = \mathrm{AB}(\Upsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή ΖΔ=ΑΘ **(1).**
Όμοια συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΘ και ΓΕΗ και προκύπτει ότι ΑΘ=ΗΕ **(2)**. Από **(1)** και **(2)** προκύπτει ότι ΖΔ=ΗΕ, δηλαδή τα Δ και Ε ισαπέχουν από τη βάση ΒΓ.

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α.



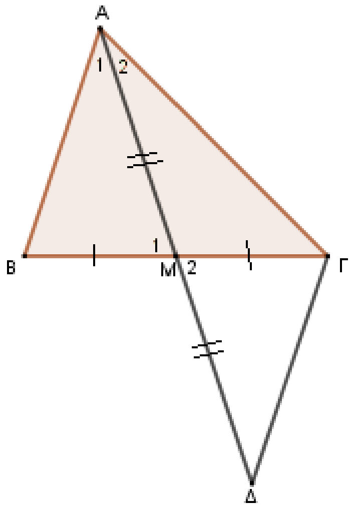
i. Φέρουμε το ύψος ΟΕ του τριγώνου ΟΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ είναι ισοσκελή εφόσον ΟΒ=ΟΓ και ΟΑ=ΟΔ ως ακτίνες των κύκλων. Οπότε η ΟΕ θα είναι και διάμεσος των τριγώνων. Δηλαδή θα είναι ΑΕ=ΕΔ και ΒΕ=ΕΓ. Αφαιρώντας τις δύο αυτές Ισότητες κατά μέλη, προκύπτει ότι ΑΒ=ΓΔ.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{B}_2 = \Gamma_2 \left(\text{ως παραπληρώματα των } \mathrm{B}_1 = \Gamma_1\right) \\ 2.\mathrm{OB} = \mathrm{O}\Gamma \left(\text{ως ακτίνες του κύκλου}\right) \\ 3.\mathrm{AB} = \Gamma\Delta (\text{προηγούμενο ερώτημα}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

B.i.



Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΑΜ=ΜΔ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΜΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AM} = \mathrm{M}\Delta(\Upsilon) \\ 2.\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2(\Omega\varsigma\ \kappa\alpha\tau\alpha\kappa o\rho\upsilon\varphi\acute{\eta}\nu) \\ 3.\mathrm{BM} = \mathrm{M}\Gamma(\mathrm{AM} : \delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\varsigma) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Οπότε ΑΒ=ΓΔ. Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι ΓΔ=ΑΒ<ΑΓ άρα $\mathrm{A}_2 < \Delta$.
Όμως, $\Delta = \mathrm{A}_1$ (προηγούμενη σύγκριση) άρα $\mathrm{A}_2 < \mathrm{A}_1$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\mathrm{A}\Gamma + \Gamma\Delta < \mathrm{A}\Delta < \mathrm{A}\Gamma - \Gamma\Delta \Rightarrow$$

$$\beta - \gamma < 2\mu_\alpha < \beta + \gamma \Rightarrow$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$$

iii. Όμοια με πριν έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \mu_\beta < \dfrac{\alpha+\gamma}{2} \\ \mu_\gamma < \dfrac{\beta+\alpha}{2} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < \frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2} = 2\tau.$$

Θέμα 4$^{\text{ο}}$:

Α.

i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Δ' :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΒ} = \text{Α'Β'}(\text{Υ}) \\ 2.\text{Β} = \text{Β'} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\text{ΒΔ} = \text{Β'Δ'}$ (1).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΘΔ και Β'Θ'Δ' :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΒΔ} = \text{Β'Δ'}(1) \\ 2.\text{Β}_2 = \text{Β}'_2(\text{ως μισά ίσων γωνιών}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

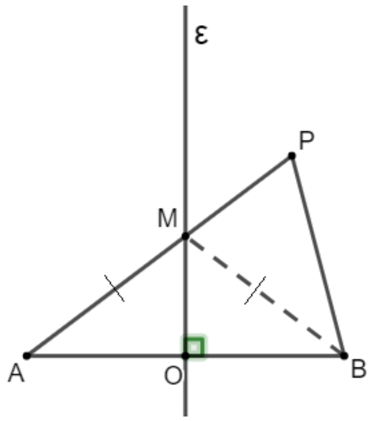
Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, δηλαδή $\text{ΘΔ} = \text{Θ'Δ'}$.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και Α'Β'Ε' :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{Α} = \text{Α'}(\text{Υ}) \\ 2.\text{Β} = \text{Β'}(\text{Υ}) \\ 3.\text{ΑΒ} = \text{Α'Β'}(\text{Υ}) \end{array}\right\} \overset{\text{Γ-Π-Γ}}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Άρα, $\text{ΒΕ} = \text{Β'Ε'}$ και από την προηγούμενη σύγκριση είναι $\text{ΒΘ} = \text{Β'Θ'}$, Οπότε αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει $\text{ΘΕ} = \text{Θ'Ε'}$.

Β.



Το Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ οπότε ΑΜ=ΜΒ (1).
Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΜΡΒ έχουμε:

$$BP < MB + MP \overset{(1)}{\Rightarrow} BP < AM + MP \Rightarrow BP < AP \ .$$