ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 48

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Όλη η ύλη **31-03-18**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Τι ονομάζουμε ρόμβο; **(7 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. **(8 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι β-γ<α<β+γ. **Σ Λ**

ii. Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ενός τριγώνου. **Σ Λ**

iii. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει τις διαγώνιους του ίσες, τότε είναι ορθογώνιο. **Σ Λ**

iv. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες είναι η μεσοπαράλληλος. **Σ Λ**

v. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες είναι μεταξύ τους ίσες. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΑΓ και το σημείο Μ μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν η ΑΜ τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

Α. ΑΜ=ΜΕ. **(5 μον.)**

Β. $ΑΕ \perp ΒΓ$. **(8 μον.)**

Γ. Το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ρόμβος. **(7 μον.)**

Δ. Το σημείο Γ είναι μέσο του ΔΕ. **(5 μον.)**

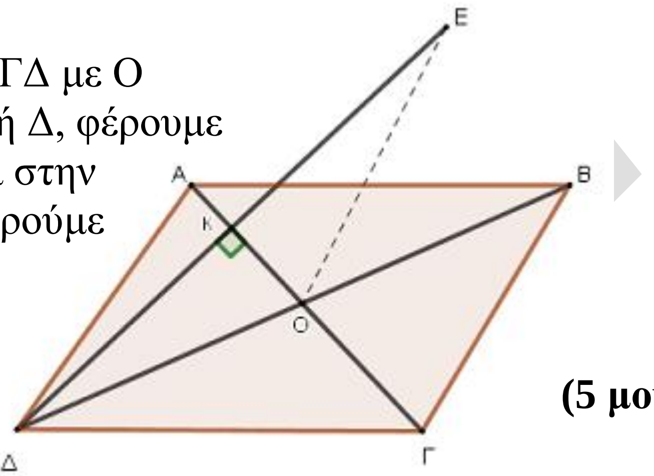
<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=2ΑΒ, η διάμεσός του ΑΜ και οι διάμεσοι ΑΝ και ΜΔ του τριγώνου ΑΒΜ. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΝ είναι ίσα. **(6 μον.)**

ii. Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΓΑΝ. **(4 μον.)**

Β. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ, φέρουμε τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΚΕ=ΔΚ.



Να αποδείξετε ότι:

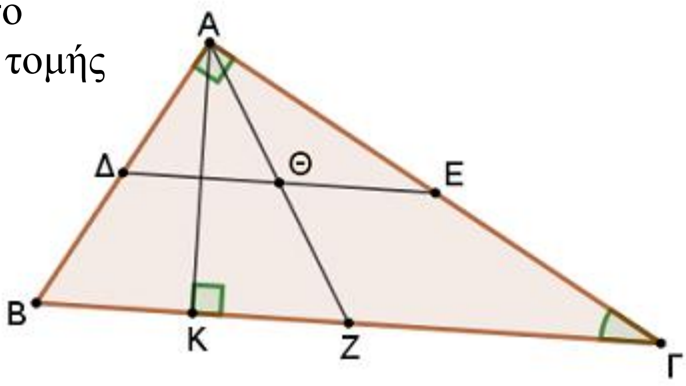
i. $EO = \frac{B\Delta}{2}$. **(5 μον.)**

ii. Η γωνία ΔΕΒ είναι ορθή. **(5 μον.)**

iii. Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. **(5 μον.)**

<u>Θέμα 4^o:</u>

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$, τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του και το ύψος του ΑΚ. Έστω Θ είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΔΕ.



Α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο. **(6 μον.)**

ii. $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$. **(7 μον.)**

Β. Αν επιπλέον η γωνία $\Gamma = 30^\circ$,

i. Να βρείτε τη γωνία AZB . **(6 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $BK = \frac{B\Gamma}{4}$. **(6 μον.)**

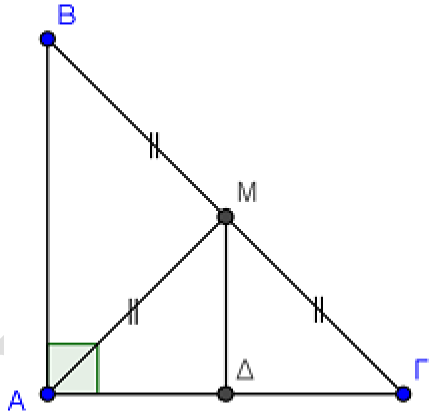
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Ρόμβο ονομάζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

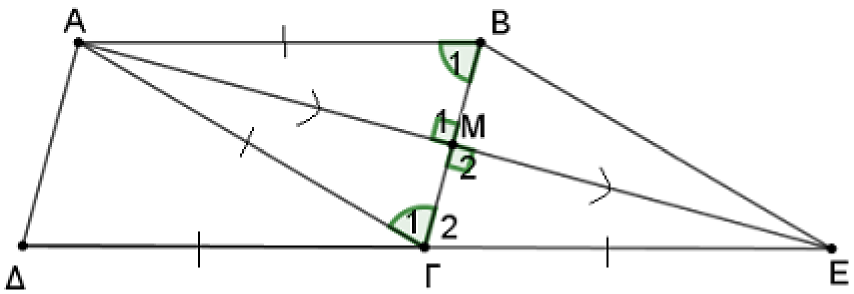
Β. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma(\hat{A}=90^{\circ})$και τη διάμεσό του ΑΜ. Θα αποδείξουμε ότι $AM=\frac{B\Gamma}{2}$. Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ//ΑΒ. Αλλά $AB\perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta\perp A\Gamma$. Άρα το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ=ΜΓ, δηλαδή $AM=\frac{B\Gamma}{2}$.



Γ. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2^{o}:

Α.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΜΓΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.B_1=\Gamma_2\,(\text{εντός εναλλάξ των } AB//\Delta E, \text{τέμνουσα τη } B\Gamma) \\ 2.M_1=M_2\,(\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.BM=M\Gamma\,(Y) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow}$$

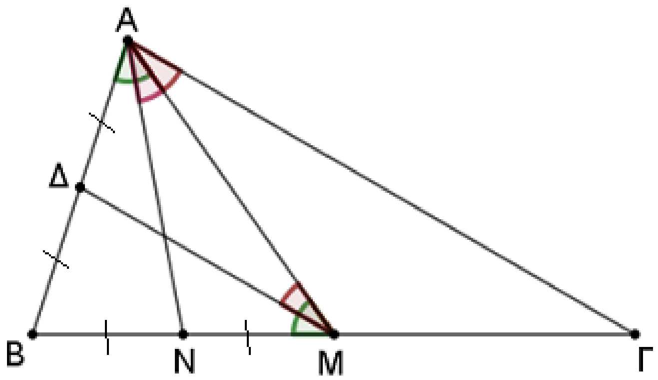
Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε και ΑΜ=ΜΕ.

Β. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος άρα θα είναι και ύψος. Οπότε $\mathrm{AE} \perp \mathrm{B\Gamma}$.

Γ. Στο τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι ΒΜ=ΜΓ(Υ) και ΑΜ=ΜΕ(α ερώτημα), άρα οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, οι διαδοχικές πλευρές του ΑΒ, ΑΓ είναι ίσες, οπότε το ΑΒΕΓ είναι ρόμβος.

Δ. Εφόσον το ΑΒΕΓ είναι ρόμβος, θα είναι ΓΕ=ΑΒ. Όμως, ΑΒ=ΓΔ διότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΓΕ=ΓΔ. Επομένως, το Γ είναι το μέσο του ΔΕ.

<u>Θέμα 3^ο:</u>



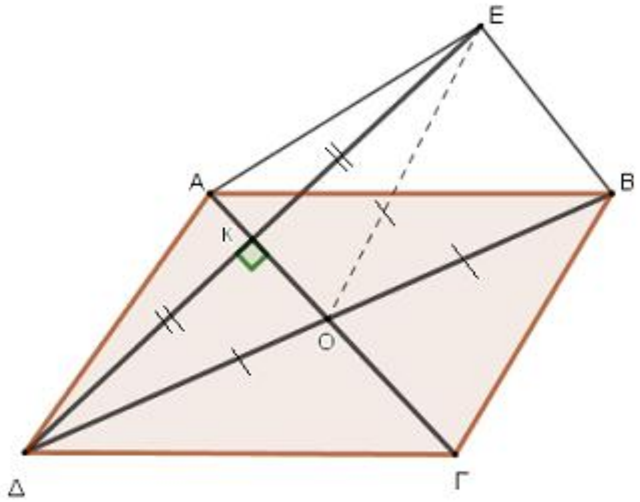
Α. i. Είναι ΒΓ=2ΑΒ και Μ μέσο της ΒΓ, οπότε ΑΒ=ΒΜ=ΜΓ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΔ, ΑΜΝ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AM}:\text{κοινή} \\ 2.\mathrm{A}=\mathrm{M}\left(\text{ως προσκείμενες στη βάση ισοσκελους}\right) \\ 3.\mathrm{A\Delta}=\mathrm{MN}\left(\text{ως μισά ίσων τμημάτων}\right) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Μ και Δ είναι μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, οπότε ΜΔ//ΑΓ. Επομένως, $\Gamma\mathrm{AM}=\Delta\mathrm{MA}\left(1\right)$, ως εντός κι εναλλάξ των ΜΔ//ΑΓ με τέμνουσα την ΑΜ. Επίσης, $\mathrm{NAM}=\Delta\mathrm{MA}\left(2\right)$ από προηγούμενη σύγκριση. Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathrm{NAM}=\mathrm{MA\Gamma}$ δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της $\Gamma\mathrm{AN}$.

Β.

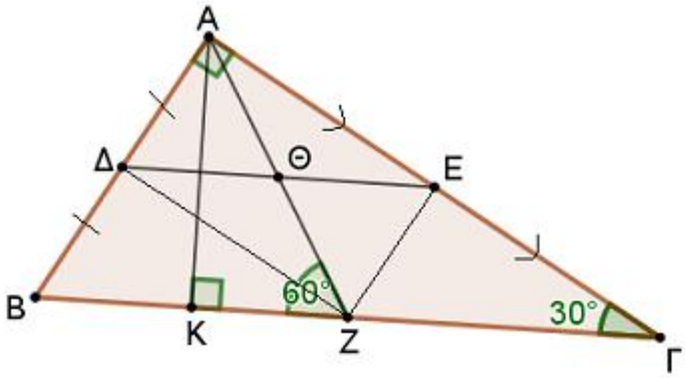


i. Στο τρίγωνο ΔΟΕ, η ΟΚ είναι διάμεσος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΔΟ=ΟΕ(1). Όμως, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, άρα $\Delta O = OB = \frac{\Delta B}{2}$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει $OE = \frac{\Delta B}{2}$.

ii. Στο τρίγωνο ΔΕΒ η διάμεσός του ΟΕ είναι ίση με το μισό της ΔΒ (σύμφωνα με το i), οπότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\Delta EB = 90^\circ$.

iii. Είναι ΕΒ//ΑΓ εφόσον $EK \perp A\Gamma$ και $EK \perp EB$. Επομένως, το ΑΕΒΓ είναι τραπέζιο. στο τρίγωνο ΔΑΕ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε είναι ισοσκελές. Δηλαδή ΑΔ=ΑΕ(1). Όμως, ΑΔ=ΒΓ(2) ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα από (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΕ=ΒΓ. Άρα, το τραπέζιο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές.

Θέμα 4^{ο}:



Α.i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Ε, Ζ είναι μέσα των ΑΓ και ΒΓ οπότε $EZ = //\frac{AB}{2}$ δηλαδή ΕΖ=//ΑΔ. Επίσης $A = 90^{\circ}$ οπότε το ΑΔΖΕ είναι ορθογώνιο.

ii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσοι και διχοτομούνται, άρα ΑΘ=ΔΘ=ΘΖ=ΘΕ (1). Στο τρίγωνο ΑΓΖ το Ε είναι μέσο της ΑΓ και ΕΘ//ΓΖ οπότε το Θ είναι μέσο της ΑΖ και $\Theta E // = \frac{Z\Gamma}{2}$ (2).

Επίσης, $BZ = Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ (3). Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι

$A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$.

Β.i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΖ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, άρα $AZ = \frac{B\Gamma}{2}$. Επίσης, εφόσον $\Gamma = 30^{\circ}$ είναι $AB = \frac{B\Gamma}{2}$. Δηλαδή το ΑΒΖ είναι ισόπλευρο. Οπότε $AZB = 60^{\circ}$.

ii. Εφόσον το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισόπλευρο, το ύψος του ΑΚ, θα είναι και διάμεσος, άρα $BK = \frac{BZ}{2}$. Όμως, $BZ = \frac{B\Gamma}{2}$, άρα $BK = \frac{B\Gamma}{4}$.