ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 47

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα, Παράλληλες ευθείες **13-01-18**

Θέμα 1ο:

Α. Να διατυπώσετε την τριγωνική ανισότητα. Στη συνέχεια να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α=2, β=9 και γ=6. **(7 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 2 ορθές. **(8 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός πενταγώνου ισούται με $\left(2\cdot 5-4\right)\cdot 90^{\circ}=540^{\circ}$. **Σ Λ**

ii. Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές. **Σ Λ**

iii. Για δύο τεμνόμενους κύκλους ισχύει δ>R+ρ. **Σ Λ**

iv. Το σημείο τομής των μεσοκαθέτων ενός τριγώνου είναι το έγκεντρο. **Σ Λ**

v. Δύο οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες είναι ίσες μεταξύ τους. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ, φέρουμε τα ύψη ΔΜ, ΜΕ προς τις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

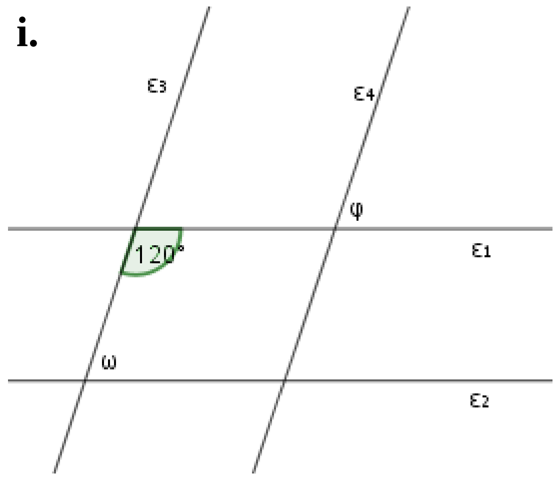
i. Να κατασκευάσετε το παραπάνω σχήμα και να σημειώσετε πάνω σ’ αυτό τις πληροφορίες που σας δίνονται. **(3 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι ΔΜ=ΜΕ. **(5 μον.)**

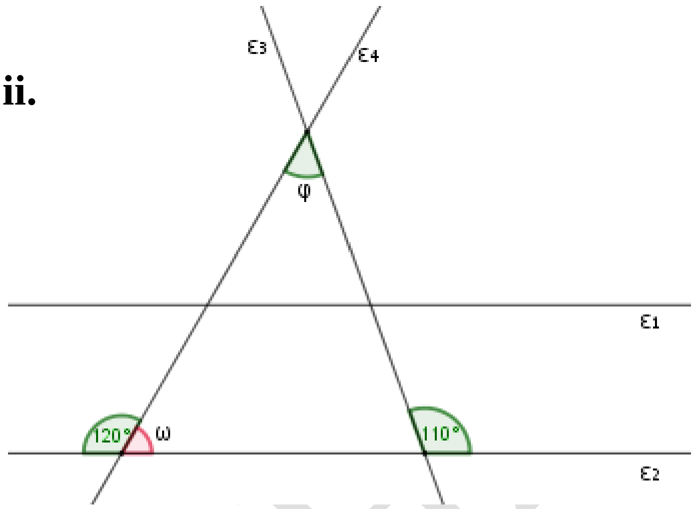
iii. Να αποδείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί τη γωνία ΔΜΕ. **(5 μον.)**

Β. Στα παρακάτω σχήματα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$. Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.

i.



ii.



(2x6=12 μον.)

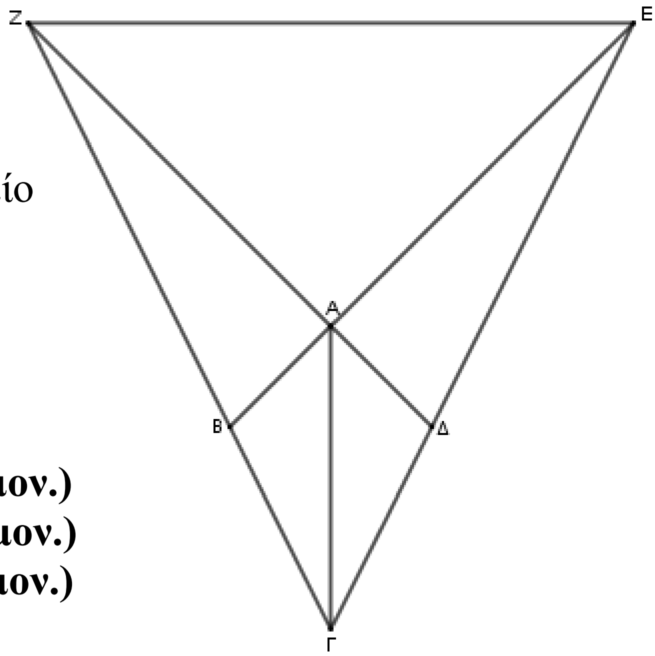
<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ=ΑΔ και ΓΒ=ΓΔ, όπως στο διπλανό σχήμα. Αν Ε είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ να αποδείξετε ότι:

i. Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ. **(5 μον.)**

ii. ΓΖ=ΓΕ. **(5 μον.)**

iii. ΕΖ//ΒΔ. **(6 μον.)**



Β. Ένας μαθητής της Α’ Λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μία τυχαία γωνία xOy. Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή Ο της γωνίας σχεδιάζει δύο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οx και Οy της γωνίας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα Γ και Δ. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι παράλληλες. Μπορείτε να δικαιολογήσετε; **(10 μον.)**

Θέμα 4^{o}:

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΒΑ=ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε $Γ\Delta \perp ΒΓ$ με ΓΔ=ΑΒ (Α, Δ εκατέρωθεν της ΒΓ).

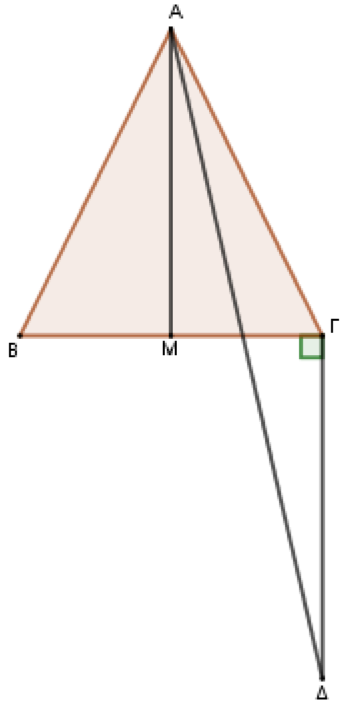
Να αποδείξετε ότι:

Α. ΑΜ//ΓΔ. **(6 μον.)**

Β. Η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ. **(6 μον.)**

Γ. $\Delta ΑΓ = 45^{\circ} - \frac{Β}{2}$. **(7 μον.)**

Δ. ΑΔ<2ΑΒ. **(6 μον.)**

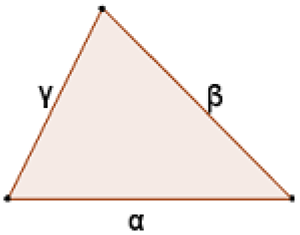


ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)</u>

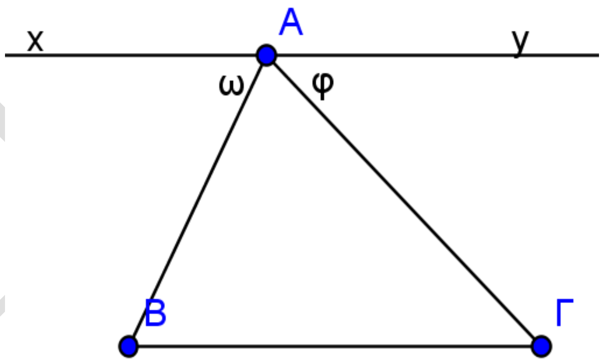
<u>Θέμα 1^{o}:</u>

Α. Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα και μεγαλύτερη από τη διαφορά των δύο άλλων πλευρών. Δηλαδή, $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$ με $\beta>\gamma$.



Δεν υπάρχει τρίγωνο με πλευρές α=2, β=9 και γ=6 διότι αν υπήρχε θα έπρεπε $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$ δηλαδή $9-6<2<9+6$ άρα $3<2<15$ που δεν ισχύει.

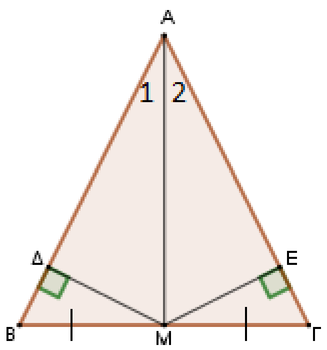
Β. Από μία κορυφή , π.χ την Α , φέρουμε xy//ΒΓ .Τότε $\omega=\hat{B}$(1) και $\varphi=\hat{\Gamma}$(2) , ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Αλλά $\omega+\hat{A}+\varphi=2L$ (3). Από τις (1) , (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2L$.



Γ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Λ **v.** Σ

<u>Θέμα 2^{o}:</u>

Α. i.



ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ, ΑΕΜ:

$$\left.\begin{aligned}&1.\mathrm{AM}:\text{κοινή}\\&2.\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2\left(\mathrm{AM}:\text{διάμεσος άρα και διχοτόμος του ισοσκελούς}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία άρα είναι ίσα.
Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα ΔΜ=ΜΕ.

iii. Από την προηγούμενη σύγκριση είναι $\mathrm{AM\Delta}=\mathrm{AME}$ άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΜΕ.

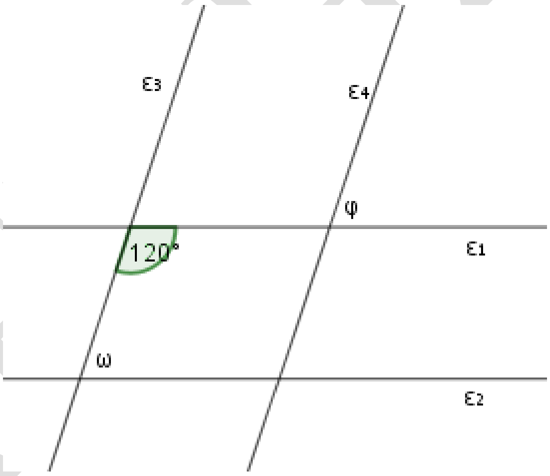
B.i. Είναι :

$\omega=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$

ως εντός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ε_1 και ε_2 με τέμνουσα την ε_3. Επίσης:

$\varphi=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$

ως εντός εκτός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε_3 και ε_4 με τέμνουσα την ε_1.



ii. Είναι:

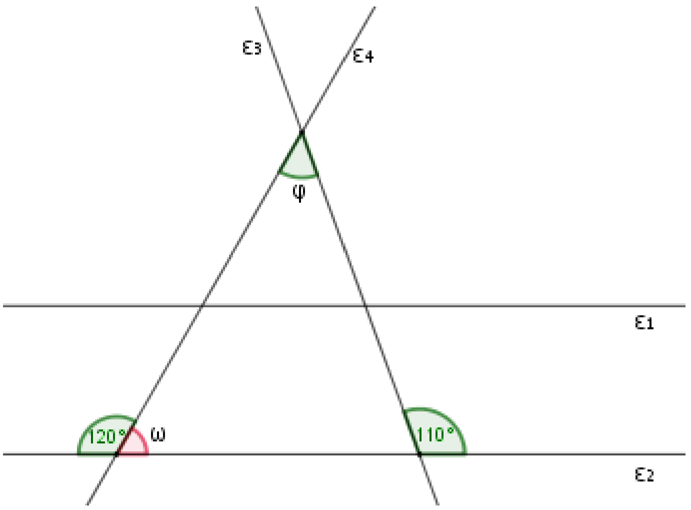
$\omega=180^{\circ}-120^{\circ}=60^{\circ}$

ως παραπληρωματική γωνία των 120°. Επίσης:

$110^{\circ}=\varphi+\omega\Leftrightarrow\varphi=110^{\circ}-60^{\circ}\Leftrightarrow$

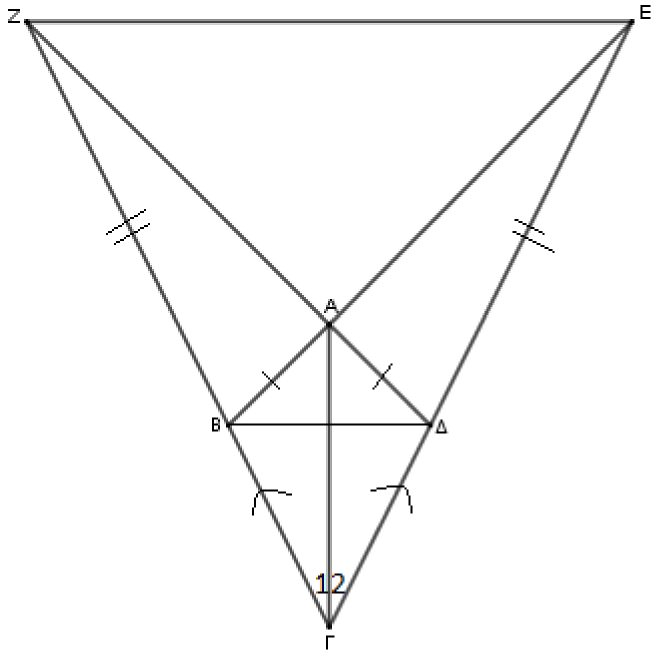
$\varphi=50^{\circ}$

Εφόσον η γωνία των 110° είναι εξωτερική του τριγώνου.



Θέμα 3ο:

A.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ:

$$\left.\begin{aligned} &1.\text{AB} = \text{A}\Delta(\Upsilon) \\ &2.\text{B}\Gamma = \Gamma\Delta(\Upsilon) \\ &3.\text{A}\Gamma : \text{κοινή} \end{aligned}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Επομένως οι γωνίες ΒΓΑ και ΑΓΔ είναι ίσες, άρα η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

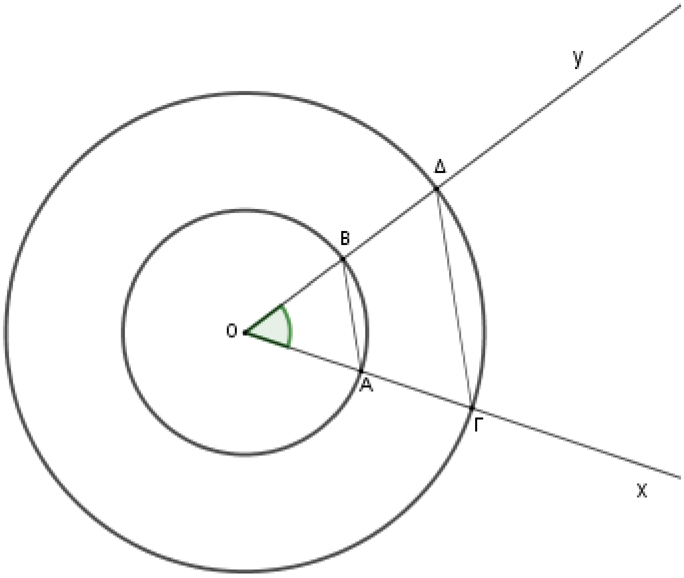
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΔΖ, ΒΕΓ:

$$\left.\begin{aligned} &1.\Gamma : \text{κοινή} \\ &2.\text{B} = \Delta(\text{προηγ.σύγκριση}) \\ &3.\Delta\Gamma = \text{B}\Gamma(\Upsilon) \end{aligned}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Επομένως είναι ΖΓ=ΕΓ.

iii. Εφόσον ΖΓ=ΕΓ το τρίγωνο ΓΖΕ είναι ισοσκελές, επομένως $\text{E} = \text{Z}$ και εφόσον $\text{E} + \text{Z} + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\text{E} = 180^\circ - \Gamma \Leftrightarrow$ $\text{E} = 90^\circ - \dfrac{\Gamma}{2}$ **(1)**. Ομοίως το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\text{B} = \Delta$ και $\text{B} + \Delta + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Delta = 180^\circ - \Gamma \Leftrightarrow$ $\Delta = 90^\circ - \dfrac{\Gamma}{2}$ **(2)** . Από **(1), (2)** προκύπτει ότι $\text{E} = \Delta$. Όμως, έχουν θέση εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη στις ευθείες ΒΔ και ΖΕ με τέμνουσα την ΓΕ, οπότε θα είναι ΒΔ//ΕΖ.

Β.



Εφόσον ΟΑ=ΟΒ(=ρ) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, επομένως

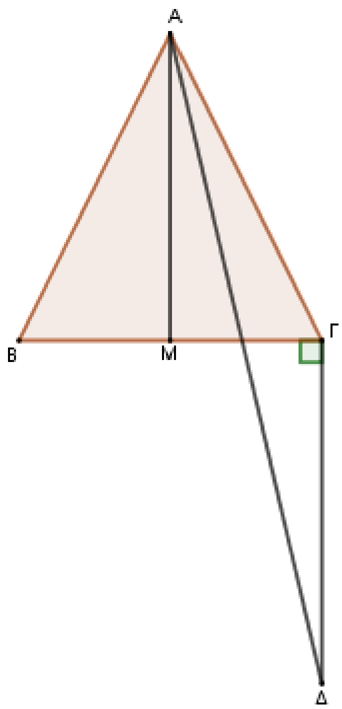
$\mathrm{A} = \mathrm{B}$ και εφόσον $\mathrm{O} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\mathrm{A} = 180^\circ - \mathrm{O} \Leftrightarrow \mathrm{A} = 90^\circ - \frac{\mathrm{O}}{2}$ **(1)**.

Ομοίως το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, οπότε $\Gamma = \Delta$ και

$\mathrm{O} + \Delta + \Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow 2\Gamma = 180^\circ - \mathrm{O} \Leftrightarrow \Gamma = 90^\circ - \frac{\mathrm{O}}{2}$ **(2)** . Από **(1), (2)**

προκύπτει ότι $\mathrm{A} = \Gamma$. Όμως, έχουν θέση εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη στις ευθείες ΒΑ και ΓΔ με τέμνουσα την ΟΓ, οπότε θα είναι ΑΒ//ΓΔ.

<u>Θέμα 4^{o}:</u>



Α. Εφόσον το ΑΒΓ είναι ισοσκελές η διάμεσός του ΑΜ θα είναι ύψος. Οπότε έχουμε ότι: $\mathrm{AM} \perp \mathrm{B}\Gamma$ και $\Gamma\Delta \perp \mathrm{B}\Gamma$ δηλαδή ΑΜ//ΔΓ.

Β. Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές οπότε $\mathrm{A}\Delta\Gamma = \Delta\mathrm{A}\Gamma$ **(1)**. Επίσης, $\mathrm{MA}\Delta = \mathrm{A}\Delta\Gamma$ **(2)** ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΜ και ΔΓ με τέμνουσα την ΑΔ. Από **(1), (2)** προκύπτει ότι: $\Delta\mathrm{A}\Gamma = \Delta\mathrm{AM}$. Δηλαδή, η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας ΜΑΓ.

Γ. Είναι: $\Delta A\Gamma = 45^\circ - \frac{B}{2} \Leftrightarrow 2\Delta A\Gamma = 90^\circ - B \Leftrightarrow MA\Gamma = 90^\circ - \Gamma$ που ισχύει στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΜΓ.

Δ. Από τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε:

$A\Delta < A\Gamma + \Gamma\Delta \overset{A\Gamma=\Gamma\Delta}{\Leftrightarrow} A\Delta < 2A\Gamma \overset{A\Gamma=AB}{\Leftrightarrow} A\Delta < 2AB$.