ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **46**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα **04-11-17**

<u>Θέμα 1^ο:</u>

Α. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο; Να αναφέρετε τρεις βασικούς γεωμετρικούς τόπους που γνωρίζετε. **(6 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες μεταξύ τους, αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. **(9 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Κάθε χορδή ενός κύκλου είναι μεγαλύτερη της διαμέτρου. **Σ Λ**

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

iii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος. **Σ Λ**

iv. Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες. **Σ Λ**

v. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ αν α<β, τότε $Α < Β$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2^ο:</u>

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ, παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ τότε:

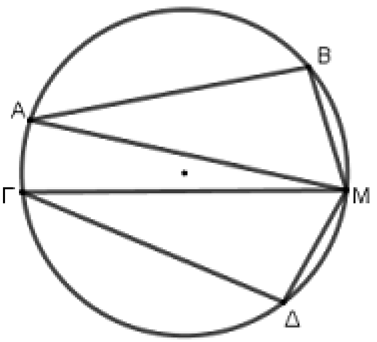
i. Να κατασκευάσετε το παραπάνω σχήμα και να σημειώσετε πάνω σ' αυτό τις πληροφορίες που σας δίνονται. **(3 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι $ΑΔΓ = ΑΕΒ$. **(5 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΓΕ είναι ίσα. **(5 μον.)**

iv. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΟΑ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ. **(2 μον.)**

Β. Στο διπλανό σχήμα τα τόξα AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσα και το σημείο Μ είναι το μέσο του τόξου $B\Delta$.
Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΔΜ είναι ίσα.



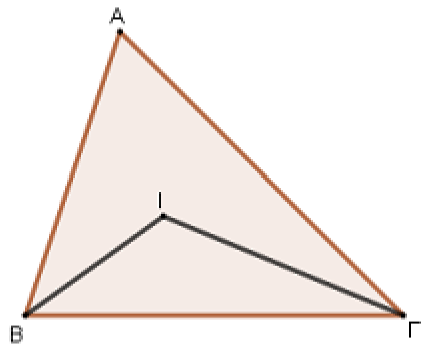
(10 μον.)

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(A = 90^\circ\right)$ και η διχοτόμος του ΒΔ.
Στην προέκταση της ΔΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΓΕ=ΓΔ. Αν Ζ είναι η προβολή του Ε στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΕΖ.

(15 μον.)

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ.
Να αποδείξετε ότι ΙΒ<ΙΓ.



(10 μον.)

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και η διάμεσός του ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι:

i. $M A\Gamma < MAB$. **(5 μον.)**

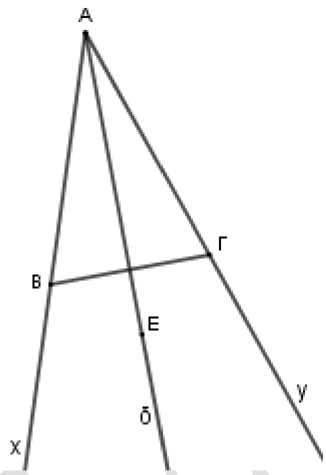
ii. $\dfrac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. **(4 μον.)**

iii. $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$. **(4 μον.)**

Β. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Aδ.
Από τυχαίο σημείο Β της Ax φέρουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.
Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΒ=ΑΓ. **(7 μον.)**

ii. Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. **(5 μον.)**



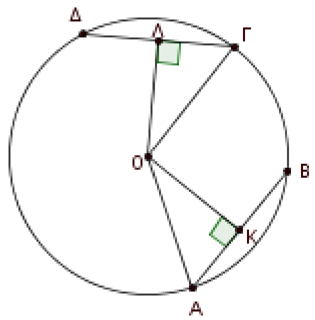
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Γεωμετρικό τόπο ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Τρεις βασικοί γεωμετρικοί τόποι είναι ο κύκλος, η μεσοκάθετος και η διχοτόμος.

Β.



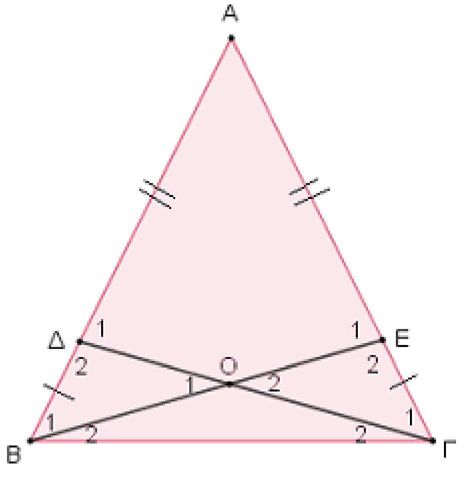
($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ). Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K}=\hat{\Lambda}=90^\circ$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ$\Leftrightarrow \frac{AB}{2}=\frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB=\Gamma\Delta$.

Γ. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα 2^{o}:

Α. i.



ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΕΒ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΕ} = \text{ΑΔ}(\text{Υ}) \\ 2.\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}(\text{Υ}) \\ 3.\text{Α}: \text{κοινή} \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Οπότε όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα, άρα $\text{ΑΔΓ} = \text{ΑΕΒ}$.

iii. Από την προηγούμενη σύγκριση είναι $\Delta_1 = \text{Ε}_1$ άρα θα είναι και $\Delta_2 = \text{Ε}_2$ (1) ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

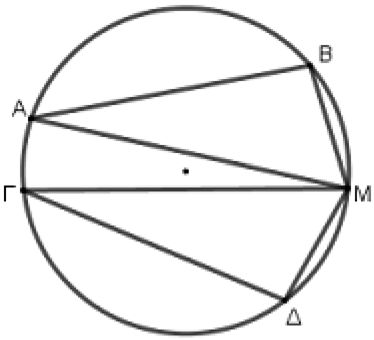
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΕΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta\text{Β} = \Gamma\text{Ε}(\text{ως διαφορές ίσων τμημάτων}) \\ 2.\text{Β}_1 = \Gamma_1(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \\ 3.\Delta_2 = \text{Ε}_2(1) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

iv. Είναι ΑΒ=ΑΓ (Υ), δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επίσης, ΟΒ=ΟΓ (iii) , δηλαδή το Ο ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή δύο σημεία ορίζουν μονοσήμαντα μία ευθεία, συμπεραίνουμε ότι η ΟΑ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ.

Β. Εφόσον τα τόξα $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα τότε θα είναι ίσες και οι αντίστοιχες χορδές τους, δηλαδή ΑΒ=ΓΔ. Ομοίως, εφόσον το Μ είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{\text{Β}\Delta}$ θα είναι



$\overset{\frown}{\text{ΒΜ}} = \overset{\frown}{\text{ΜΔ}} \Rightarrow \text{ΒΜ} = \text{ΜΔ}(1)$.

Τέλος σαν αθροίσματα ίσων τόξων έχουμε:

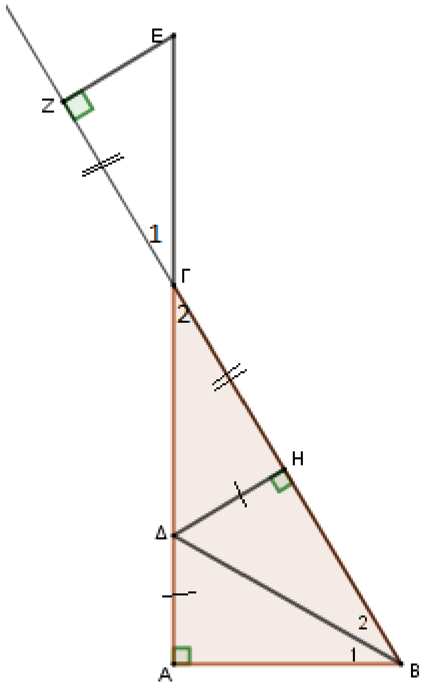
$\overset{\frown}{\text{ΑΜ}} = \overset{\frown}{\Gamma\text{Μ}} \Rightarrow \text{ΑΜ} = \Gamma\text{Μ}(2)$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΓΔΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΒ} = \Gamma\Delta(\text{Υ}) \\ 2.\text{ΒΜ} = \text{ΜΔ}(1) \\ 3.\text{ΑΜ} = \Gamma\text{Μ}(2) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Θέμα 3ο:

Α.



Φέρουμε $ΔΗ \perp ΒΓ$. Τότε είναι ΑΔ=ΔΗ (1) γιατί το Δ είναι σημείο της διχοτόμου ΒΔ άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

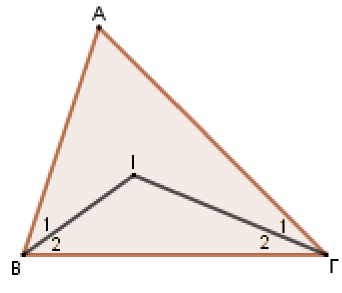
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΔΗ, ΕΖΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.ΕΓ = ΓΔ(Υ) \\ 2.Γ_1 = Γ_2 (\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε, ΖΕ=ΔΗ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι ΑΔ=ΖΕ.

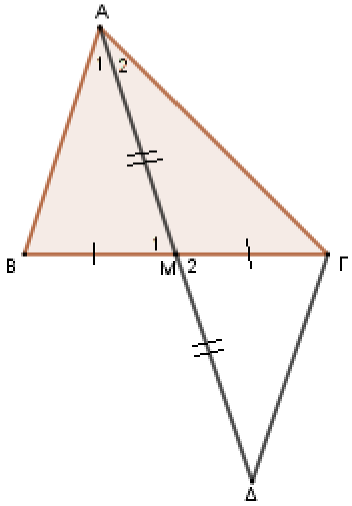
Β. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ<ΑΓ άρα θα είναι και $Γ < Β$ (1). Εφόσον, οι ΒΙ και ΓΙ είναι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ, θα είναι $Β_1 = Β_2 = \frac{Β}{2}$ και $Γ_1 = Γ_2 = \frac{Γ}{2}$. Διαιρώντας



την (1) με το 2 προκύπτει $\frac{Γ}{2} < \frac{Β}{2} \Rightarrow Γ_2 < Β_2$. Άρα στο τρίγωνο ΒΙΓ έχουμε ότι: $Γ_2 < Β_2 \Rightarrow ΒΙ < ΙΓ$.

Θέμα 4ο:

Α.i.



Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΑΜ=ΜΔ.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ, ΜΓΔ:

$$\left.\begin{aligned} &1.\mathrm{AM}=\mathrm{M\Delta}\,(\Upsilon)\\ &2.\mathrm{M}_1=\mathrm{M}_2\,(\text{Ως κατακορυφήν})\\ &3.\mathrm{BM}=\mathrm{M\Gamma}\,(\mathrm{AM}:\text{διάμεσος})\end{aligned}\right\}\overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}\ \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Οπότε ΑΒ=ΓΔ. Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι ΓΔ=ΑΒ<ΑΓ άρα $\mathrm{A}_2<\Delta$.
Όμως, $\Delta=\mathrm{A}_1$ (προηγούμενη σύγκριση) άρα $\mathrm{A}_2<\mathrm{A}_1$.

ii. Στο τρίγωνο ΑΓΔ από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}<\mathrm{A\Delta}<\mathrm{A\Gamma}-\mathrm{\Gamma\Delta}\Rightarrow$$

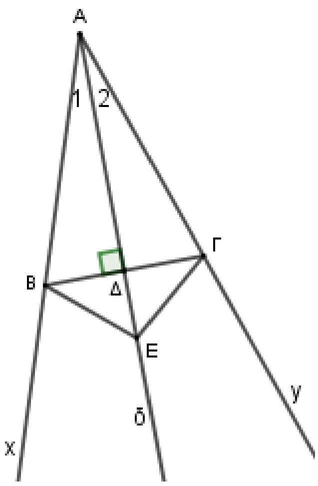
$$\beta-\gamma<2\mu_\alpha<\beta+\gamma\Rightarrow$$

$$\frac{\beta-\gamma}{2}<\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$$

iii. Όμοια με πριν έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}\\ &\mu_\beta<\frac{\alpha+\gamma}{2}\\ &\mu_\gamma<\frac{\beta+\alpha}{2}\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}\mu_\alpha+\mu_\beta+\mu_\gamma<\frac{2\alpha+2\beta+2\gamma}{2}=2\tau.$$

Β.



i. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές, επομένως ΑΒ=ΑΓ.

ii. Εφόσον ΑΒ=ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα η διχοτόμος ΑΔ θα είναι και ύψος και διάμεσος, άρα μεσοκάθετος του ΒΓ. Το Ε είναι σημείο πάνω στη μεσοκάθετο ΑΔ, επομένως θα ισαπέχει από τα Β και Γ.