ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 44

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα **27-11-16**

Θέμα 1^o:

Α. i. Να διατυπώσετε την τριγωνική ανισότητα. **(4 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α=5, β=4 και γ=1. **(3 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα, κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου. **(8 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή Α ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται με δ_α . **Σ Λ**

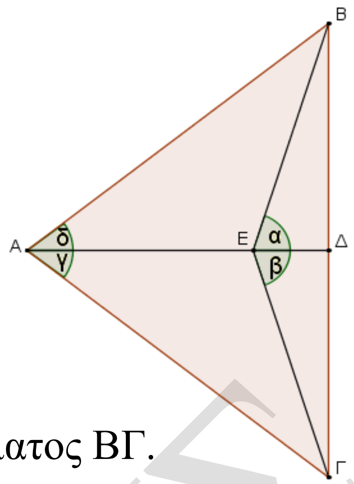
ii. Το ύψος ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι διχοτόμος και διάμεσος. **Σ Λ**

iii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι ίσα. **Σ Λ**

iv. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta \le \gamma$, τότε θα ισχύει και $\hat{B} \le \hat{\Gamma}$. **Σ Λ**

v. Υπάρχει σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τρία διαφορετικά σημεία μιας ευθείας. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)



<u>Θέμα 2°:</u>

Α. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

iii. Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

(3x5=15 μον.)

Β. Αν τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο, ώστε ΟΑ=ΟΒ και $O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$, να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΒΓ. **(10 μον.)**

<u>Θέμα 3°:</u>

Α. Αν Μ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Δ και Ε οι προβολές του στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: ΔΕ<ΒΓ.

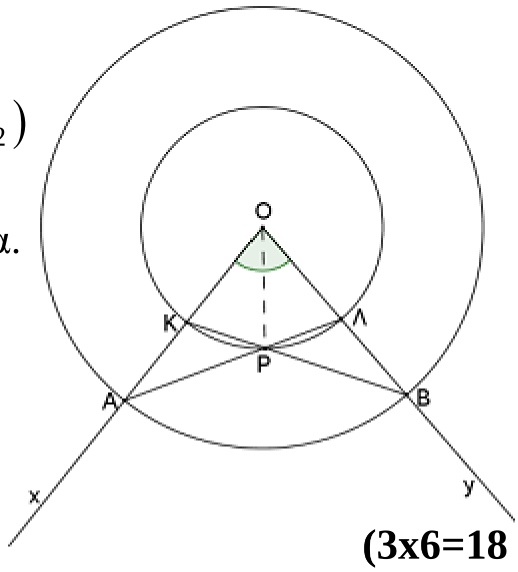
(7 μον.)

Β. Δίνεται οξεία γωνία $x\hat{O}y$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1<\rho_2$, που τέμνουν την Οx στα Κ, Α και την Οy στα Λ, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. ΑΛ=ΒΚ.

ii. Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ και ΒΚ.

iii. Η ΟΡ διχοτομεί την $x\hat{O}y$.



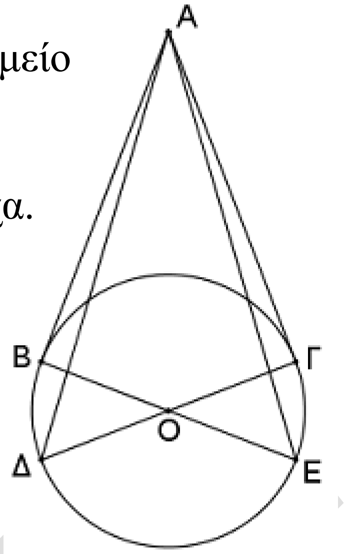
(3x6=18 μον.)

Θέμα 4ο:

Α. Έστω κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας ρ . Από σημείο Α εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. **(6 μον.)**

ii. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. **(6 μον.)**



Β. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

i. Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(5 μον.)**

ii. Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει. **(5 μον.)**

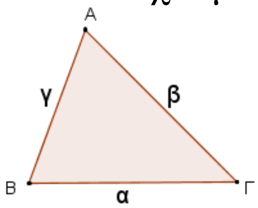
iii. Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

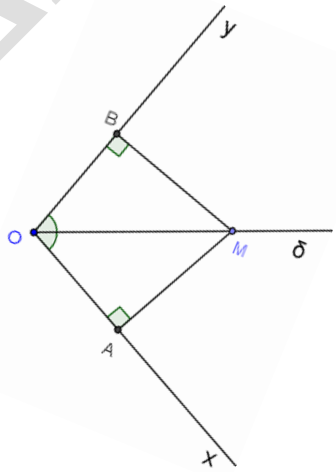
Θέμα 1ο:

Α.i. Κάθε πλευρά ενός τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.
Δηλαδή, σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$, $\beta \geq \gamma$.



ii. Είναι α>β και α>γ , οπότε για να υπάρχει τέτοιο τρίγωνο πρέπει να ισχύει $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma \Rightarrow 4-1<5<4+1 \Rightarrow 3<5<5$, που δεν ισχύει. Επομένως δεν υπάρχει τέτοιο τρίγωνο.

Β. Έστω μία γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ .Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$.Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A}=\hat{B}=90^{\circ}$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A=M\hat{O}B$.
Επομένως , ΜΑ=ΜΒ .

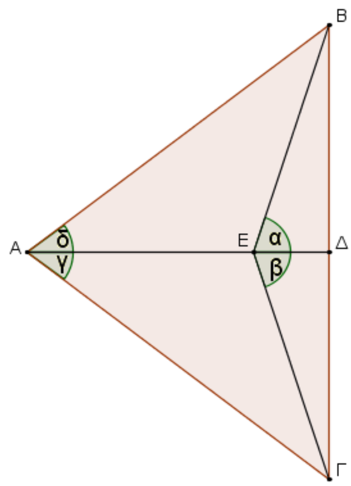


Αντίστροφα . Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας .Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι ΜΑ=ΜΒ .Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα , αφού $\hat{A}=\hat{B}=90^{\circ}$,ΟΜ κοινή και ΜΑ=ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A=M\hat{O}B$,οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ .

Γ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2^{o}:

Α.



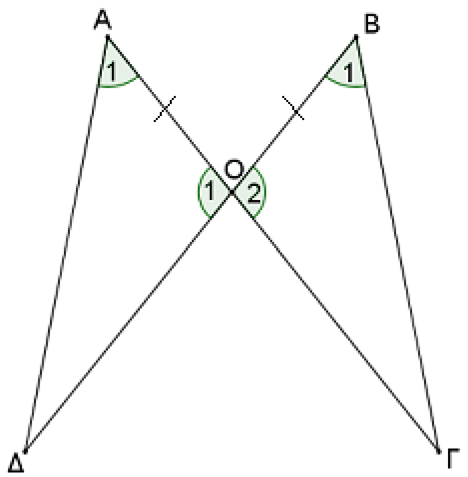
i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΑΕΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΕ}:\text{κοινή} \\ 2.\hat{\gamma}=\hat{\delta}\ (\text{Υ}) \\ 3.\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}(\text{Υ}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

ii. Από τη σύγκριση του προηγούμενου ερωτήματος είναι ΕΒ=ΕΓ. Επομένως το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές.

iii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, και η ΑΔ είναι διχοτόμος του, επομένως θα είναι και ύψος και διάμεσός του. Άρα ΒΔ=ΓΔ και $\text{ΑΔ} \perp \text{ΒΓ}$. Οπότε η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.

Β.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΔ, ΒΟΓ:

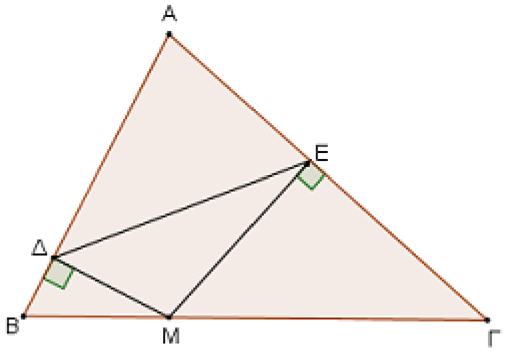
$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{\text{Α}}_1=\hat{\text{Β}}_1(\text{Υ}) \\ 2.\text{ΑΟ}=\text{ΒΟ}(\text{Υ}) \\ 3.\hat{\text{Ο}}_1=\hat{\text{Ο}}_2(\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

Επομένως όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα ένα προς ένα, οπότε ΑΔ=ΒΓ.

Θέμα 3^{o}:

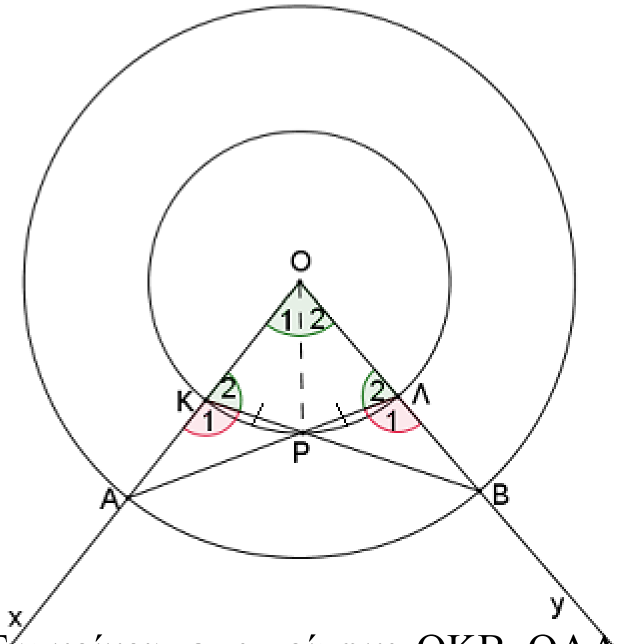
Α.



Στο τρίγωνο ΔΜΕ από τριγωνική ανισότητα έχουμε:
ΔΕ<ΔΜ+ΜΕ **(1)**.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΜ η ΒΜ είναι η υποτείνουσα, οπότε ΔΜ<ΒΜ **(2)**.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΕΓ η ΜΓ είναι η υποτείνουσα, οπότε ΜΕ<ΜΓ **(3)**.
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\Delta E < \Delta M + ME \overset{(2),(3)}{\Rightarrow} \Delta E < BM + M\Gamma \Rightarrow \Delta E < B\Gamma.$$

Β.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΚΒ, ΟΛΑ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.O\Lambda = OK\left(\text{ακτίνες του } (O,\rho_1)\right) \\ 2.AO = OB\left(\text{ακτίνες του } (O,\rho_2)\right) \\ 3.\widehat{O}: \text{κοινή} \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Επομένως, όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα, οπότε ΑΛ=ΒΚ.

ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΡΚ, ΒΡΛ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{KA}=\Lambda\mathrm{B}\left(\text{ως διαφορές ίσων τμημάτων }(\rho_2-\rho_1)\right) \\ 2.\widehat{\mathrm{A}}=\widehat{\mathrm{B}}(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \\ 3.\widehat{\mathrm{K}}_1=\widehat{\Lambda}_1\left(\text{ως παραπλ.ίσων γωνιών } \widehat{\mathrm{K}}_2=\widehat{\Lambda}_2(\text{πρ.σύγκ.})\right) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε θα είναι ΑΡ=ΒΡ , δηλαδή το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές.

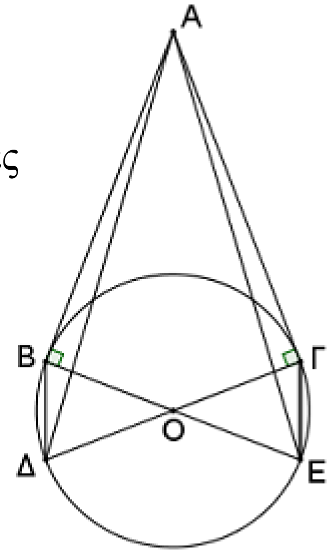
iii. Από τη σύγκριση του προηγούμενου ερωτήματος, έχουμε ότι οι χορδές, ΚΡ, ΛΡ είναι ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα τους, $\overset{\frown}{\mathrm{K}\mathrm{P}}=\overset{\frown}{\Lambda\mathrm{P}}$ θα είναι ίσα. Επομένως και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα τόξα αυτά θα είναι ίσες. Δηλαδή, $\widehat{\mathrm{O}}_1=\widehat{\mathrm{O}}_2$, οπότε η ΟΡ είναι διχοτόμος της $x\widehat{\mathrm{O}}y$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΓΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma(\text{εφαπτόμενα τμήματα}) \\ 2.\mathrm{BE}=\Gamma\Delta(\text{ως διάμετροι του κύκλου}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

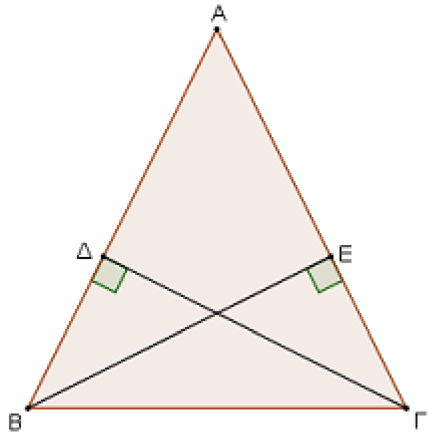


ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma(\text{εφαπτ.τμήματα}) \\ 2.\mathrm{AE}=\mathrm{A}\Delta(\text{προηγ.σύγκριση}) \\ 3.\mathrm{B}\Delta=\Gamma\mathrm{E}\left(\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Delta=\Gamma\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{E}\Rightarrow\overset{\frown}{\mathrm{B}\Delta}=\overset{\frown}{\Gamma\mathrm{E}}\right) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β.i. Έστω τρίγωνο ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Φέρουμε τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ. Θα αποδείξουμε ότι ΒΕ=ΓΔ.



Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ:

$$\left.\begin{array}{l}1.\mathrm{B\Gamma}: \text{κοινή}\\ 2.\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}\left(\text{ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία οπότε είναι ίσα. Επομένως θα ισχύει ότι ΒΕ=ΓΔ, δηλαδή η δοθείσα πρόταση Π ισχύει.

ii. Η αντίστροφη της πρότασης Π είναι:

« Εάν τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ.»

Για τη απόδειξή της έχουμε:

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ:

$$\left.\begin{array}{l}1.\mathrm{B\Gamma}: \text{κοινή}\\ 2.\mathrm{BE}=\Gamma\Delta\left(\Upsilon\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Επομένως θα είναι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ.

iii. « Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ, αν και μόνο αν τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.»