ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 43

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου

Ύλη: Όλη η ύλη 08-05-16

<u>Θέμα 1</u>

Θέμα 1ο:

Α. Σε ποιες κατηγορίες ταξινομούνται τα τρίγωνα με βάση τις πλευρές τους και σε ποιες με βάση τις γωνίες τους; (αναλυτικά) **(6 μον.)**

Β. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο; **(4 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους. **Σ Λ**

ii. Το βαρύκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ενός τριγώνου. **Σ Λ**

iii. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες. **Σ Λ**

iv. Έστω ΑΒΓΔ ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο. Αν $A_{εξ.} = 65^\circ$, τότε $\Gamma = 115^\circ$. **Σ Λ**

v. Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι (2ν-4)L. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΔ=ΑΕ. Να αποδείξετε ότι:

i. ΒΕ=ΓΔ.

ii. ΒΔ=ΓΕ.

iii. $\Delta B\Gamma = E\Gamma B$.

(5x3=15 μον.)

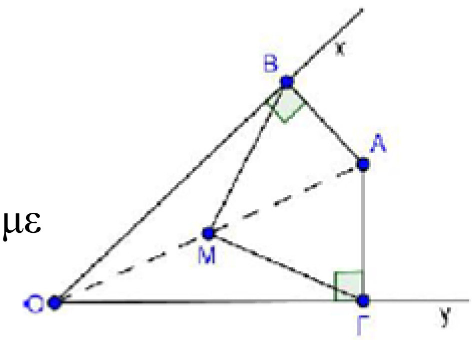
Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΜΑ. Από το Α φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. $\mathrm{BM} = \dfrac{\mathrm{A}\mathrm{E}}{2}$. **(2x5=10 μον.)**

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Α. Δίνεται γωνία xOy και σημείο Α στο εσωτερικό της. Από το Α φέρνουμε τις κάθετες ΑΒ, ΑΓ προς τις πλευρές Ox, Oy της γωνίας αντίστοιχα και ονομάζουμε Μ το μέσο του ΟΑ. Να αποδείξετε ότι:

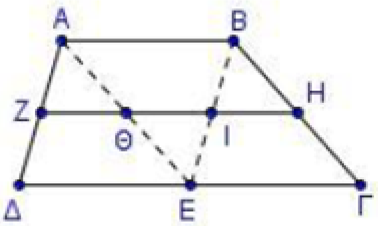


i. Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές.

ii. $\mathrm{BM\Gamma} = 2\mathrm{xOy}$.

(2x5=10 μον.)

Β. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ΓΔ=2ΑΒ. Επίσης Ζ, Η, Ε είναι τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Ακόμη η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ,ΒΕ στα σημεία Θ, Ι αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



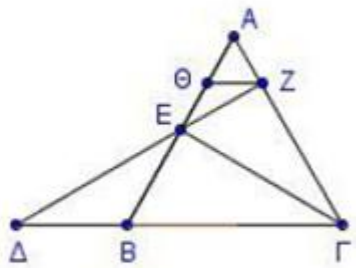
i. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα σημεία Θ, Ι είναι μέσα των ΑΕ, ΒΕ αντίστοιχα.

iii. $\mathrm{ZH} = \dfrac{3}{2}\mathrm{AB}$. **(3x5=15 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΓΕ. Στην προέκταση της ΓΒ προς το Β, θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο, ώστε $Β\Delta = \frac{ΒΓ}{2}$.



Αν η ευθεία ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και ΖΘ//ΒΓ:

i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές και το τρίγωνο ΑΘΖ είναι ισόπλευρο. **(10 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΘΕΖ. **(5 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι ΑΕ=2ΘΖ. **(5 μον.)**

iv. Να αποδείξετε ότι 3ΑΒ=4ΘΒ. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Τα τρίγωνα με βάση τις πλευρές τους διακρίνονται σε:

1. Ισοσκελή, που έχουν 2 πλευρές ίσες.
2. Ισόπλευρα, που έχουν και τις 3 πλευρές τους ίσες.
3. Σκαληνά, που έχουν όλες τους τις πλευρές άνισες.

Τα τρίγωνα με βάση τις γωνίες τους διακρίνονται σε:

1. Οξυγώνια, που έχουν και τις 3 γωνίες τους οξείες.
2. Αμβλυγώνια, που έχουν 1 γωνία τους αμβλεία.
3. Ορθογώνια, που έχουν 1 γωνία τους ορθή.

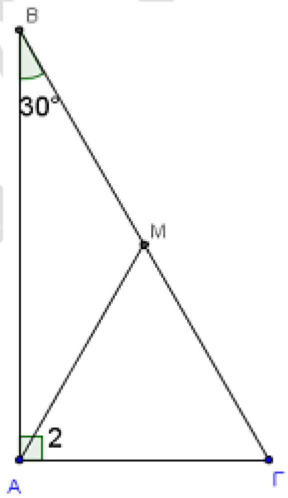
Β. Ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Γ. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(A = 90^\circ\right)$ με $B = 30^\circ$. Θα

Αποδείξουμε ότι $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$. Επειδή $B = 30^\circ$, είναι $\Gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma$. Έτσι $A_2 = \Gamma = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο.

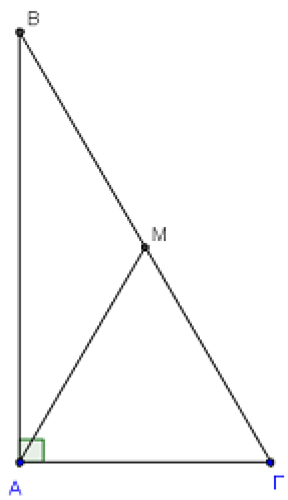
Επομένως $A\Gamma = M\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι $B = 30^\circ$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM = \dfrac{B\Gamma}{2} = M\Gamma = A\Gamma$(αφού $A\Gamma = \dfrac{B\Gamma}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\Gamma = 60^\circ$.

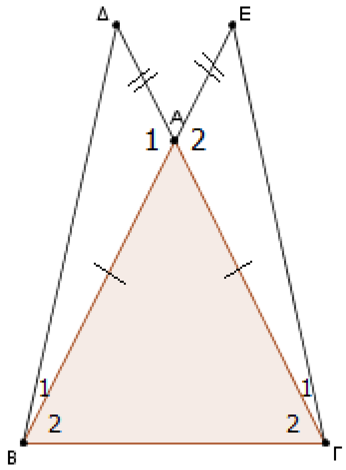
Επομένως, $B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.



Δ. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α.



i. $\left.\begin{array}{l} BA = \Gamma A \\ EA = \Delta A \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} BA + EA = \Gamma A + \Delta A \Leftrightarrow BE = \Gamma\Delta.$

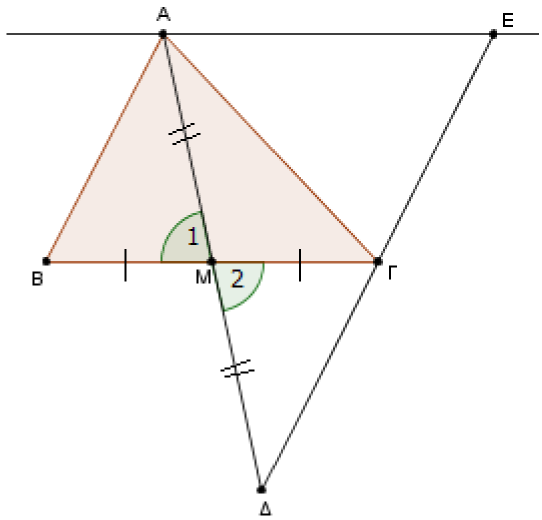
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.A_1 = A_2 (\text{ως κατακορυφήν}) \\ 2.BA = \Gamma A (Y) \\ 3.\Delta A = AE (Y) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα,}$$

οπότε ΒΔ=ΓΕ.

iii. $\left.\begin{array}{l} B_1 = \Gamma_1 (\text{προσκ. στη βάση ισοσκ.}) \\ B_2 = \Gamma_2 (\text{προηγ. σύγκριση}) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \Delta B\Gamma = E\Gamma B.$

Β.



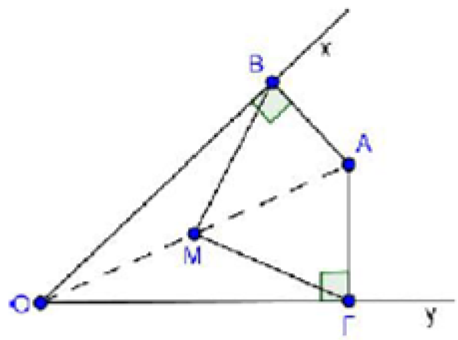
i. Είναι ΑΜ=ΜΔ και ΒΜ=ΜΓ, δηλαδή οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομούνται, οπότε το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Το τετράπλευρο ΑΒΓΕ είναι κι αυτό παραλληλόγραμμο διότι ΑΕ//ΒΓ και ΑΒ//ΓΔ άρα και ΑΒ//ΓΕ. Οπότε έχουμε:

$$\mathrm{BM}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\frac{\mathrm{AE}}{2}.$$

<u>Θέμα 3$^{\text{ο}}$:</u>

Α.

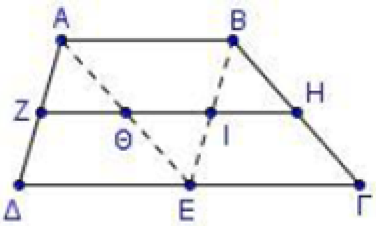


i. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΑ η ΒΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΟΑ, άρα $\mathrm{BM}=\frac{\mathrm{OA}}{2}=\mathrm{OM}(1)$. Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΑ η ΓΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα ΟΑ, άρα $\mathrm{\Gamma M}=\frac{\mathrm{OA}}{2}=\mathrm{OM}(2)$. Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΜ=ΓΜ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ισοσκελές.

ii. Είναι ΟΜ=ΜΓ=ΜΑ=ΒΜ, οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε κύκλο κέντρου Μ που να διέρχεται από τα Ο, Β, Γ, Α. Στον κύκλο αυτό η γωνία xOy είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο ΒΓ και η γωνία ΒΜΓ είναι επίκεντρη που βαίνει στο ίδιο τόξο. Συνεπώς,

$\mathrm{BM\Gamma}=2\mathrm{xOy}$.

Β.

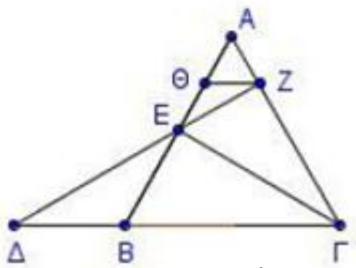


i. Έχουμε ότι ΑΒ//ΓΔ και το Ε είναι μέσο της ΓΔ οπότε:
$\text{ΕΓ} = \frac{\text{ΔΓ}}{2} = \frac{2\text{ΑΒ}}{2} = \text{ΑΒ}$. Επομένως ΑΒ//=ΓΕ, δηλαδή το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Τα Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, δηλαδή η ΖΗ είναι η διάμεσος του τραπεζίου, άρα ΖΗ//ΑΒ//ΓΔ.
Στο τρίγωνο ΑΔΕ είναι Ζ μέσο της ΑΔ και ΖΘ//ΔΕ οπότε θα είναι και Θ μέσο της ΑΕ. Ομοίως, στο τρίγωνο ΒΕΓ είναι Η μέσο της ΒΓ και ΗΙ//ΕΓ άρα και το Ι θα είναι μέσο της ΒΕ.

iii. Η ΖΗ είναι η διάμεσος του τραπεζίου, άρα
$$\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ}+2\text{ΑΒ}}{2} = \frac{3\text{ΑΒ}}{2}.$$

<u>Θέμα 4ο:</u>



i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ. Επίσης, $\text{ΒΔ} = \frac{\text{ΒΓ}}{2} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}(1)$. Το ύψος ΑΕ του ισοπλεύρου τριγώνου θα είναι και διάμεσος και διχοτόμος, οπότε $\text{ΒΕ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}(2)$. Από (1), (2) έπεται ότι ΒΔ=ΒΕ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
Επίσης, $\text{ΑΘΖ} = \text{ΑΒΓ} = 60^\circ$ ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες, των παραλλήλων ΒΓ, ΘΖ που τέμνονται από την ΑΒ.
Ομοίως $\text{ΑΖΘ} = \text{ΑΓΒ} = 60^\circ$ ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΓ, ΘΖ με τέμνουσα την ΑΓ. Οπότε στο τρίγωνο ΑΘΖ θα είναι $\text{ΘΑΖ} = 60^\circ$, άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ii. Η $Z\Theta E$ είναι εξωτερική της $A\Theta Z$, οπότε $Z\Theta E = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.
Επίσης, $\Theta EZ = \Delta EB$ (1) ως κατακορυφήν. Όμως ,
$EB\Delta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ως εξωτερική της $EB\Gamma$. Το τρίγωνο ΔΕΒ είναι ισοσκελές, οπότε $E\Delta B = \Delta EB = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.Άρα από την (1) έχουμε ότι $\Theta EZ = 30^\circ$. Στο τρίγωνο ΘΕΖ εφόσον το άθροισμα των γωνιών του είναι 180° έχουμε ότι: $EZ\Theta = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

iii. Εφόσον στο τρίγωνο ΕΘΖ οι γωνίες Ε και Ζ είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές, οπότε ΕΘ=ΘΖ=ΑΘ. Δηλαδή η ΘΖ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΕΖ. Επίσης το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ορθογώνιο, διότι $AZE = AZ\Theta + EZ\Theta = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Επομένως, η διάμεσος του είναι η μισή της υποτείνουσας, δηλαδή $\Theta Z = \dfrac{AE}{2} \Leftrightarrow AE = 2\Theta Z$.

iv. Το $A\Theta = \dfrac{AE}{2} = \dfrac{\frac{AB}{2}}{2} = \dfrac{AB}{4} = \dfrac{1}{4}AB$ άρα $\Theta B = \dfrac{3}{4}AB \Leftrightarrow 3AB = 4\Theta B$.