ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 42

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα, Παράλληλες ευθείες **14-02-16**

Θέμα 1ο:

Α. Να διατυπώσετε το Ευκλείδειο αίτημα (αίτημα παραλληλίας). **(6 μον.)**

Β. Να διατυπώσετε την τριγωνική ανισότητα. **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με 2 ορθές. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντα οξείες. **Σ Λ**

ii. Με δ_α συμβολίζουμε τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην πλευρά α τριγώνου ΑΒΓ. **Σ Λ**

iii. Αν έχουμε 4 ευθείες ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 τέτοιες ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$ και $\varepsilon_1 // \varepsilon_4$ τότε θα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_3$. **Σ Λ**

iv. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και xy η διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Α. Τότε xy//ΒΓ. **Σ Λ**

v. Αν τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΓΔΕΖ έχουν κοινή πλευρά την ΓΔ τότε το ΑΒΖΕ είναι παραλληλόγραμμο. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2ο:

Α. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσός του ΑΜ και ένα σημείο Δ της διαμέσου. Προεκτείνουμε τη διάμεσο προς το μέρος του Μ κατά τμήμα ΜΕ=ΜΔ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρουμε τις καθέτους προς τη διάμεσο που την τέμνουν στα Ζ και Η αντίστοιχα.

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΓΕ είναι ίσα.

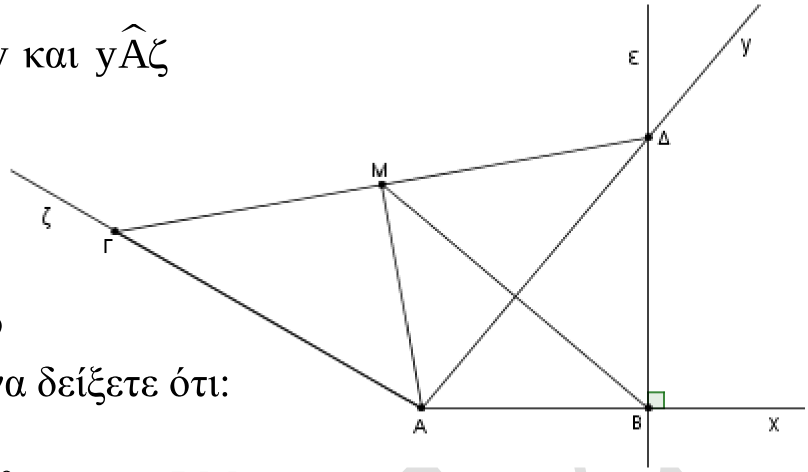
ii. Να αποδείξετε ότι: ΒΖ=ΓΗ.

iii. Να αποδείξετε ότι: ΔΖ=ΗΕ.

(5x3=15 μον.)

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Β. Έστω οι εφεξής γωνίες $x\widehat{A}y$ και $y\widehat{A}\zeta$ με $y\widehat{A}\zeta = 2x\widehat{A}y$. Η ευθεία ε τέμνει κάθετα την Αx στο Β και την Αy στο Δ. Αν Γ είναι σημείο της Αζ ώστε ΑΓ=ΑΔ και Μ σημείο της ΔΓ ώστε $x\widehat{A}M = y\widehat{A}\zeta$ να δείξετε ότι:



i. $AM \perp \Gamma\Delta$.

ii. ΑΒ=ΑΜ και ΑΔ μεσοκάθετος του ΒΜ.

(2x5=10 μον.)

Θέμα 3^{o}:

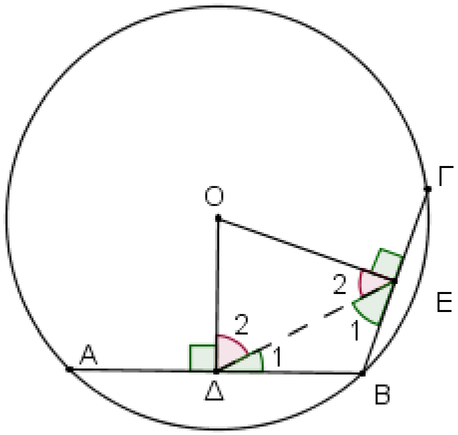
Α. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^{\circ}$. Φέρουμε το ύψος ΑΗ και από το σημείο Η παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε τα συμμετρικά του Η ως προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. ΔΑ=ΑΗ=ΑΕ. **(5 μον.)**

ii. Τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά. **(4 μον.)**

iii. Οι ευθείες ΒΔ και ΓΕ είναι παράλληλες. **(6 μον.)**

Β. Στον κύκλο με κέντρο Ο του σχήματος είναι ΑΒ>ΒΓ. Αν ΟΔ και ΟΕ τα αποστήματα των δύο χορδών, τότε:

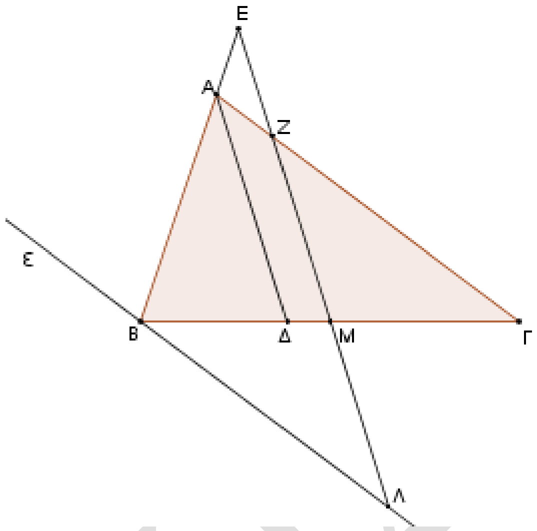


i. Να συγκρίνετε τις γωνίες $\widehat{\Delta}_1$ και $\widehat{E}_1$ του τριγώνου ΒΔΕ.

ii. Να αποδείξετε ότι: ΟΔ<ΟΕ.

(2x5=10 μον.)

Θέμα 4^o:



Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και ευθεία (ε) παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία (ε) στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. **(4 μον.)**

ii. ΒΛ=ΓΖ. **(4 μον.)**

iii. ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. **(5 μον.)**

Β. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Εκατέρωθεν της ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΒΔ=ΒΓ=ΓΕ. Φέρουμε την κάθετη της ΔΕ στο Ε η οποία τέμνει την ΔΑ στο Ζ.

i. Να δείξετε ότι ΑΔ=ΑΖ. **(4 μον.)**

ii. Αν η ΓΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΓΕ να δείξετε ότι ΑΒ//ΓΖ. **(3 μον.)**

iii. Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο. **(5 μον.)**

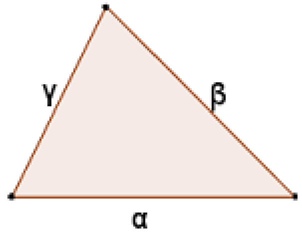
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1ο:

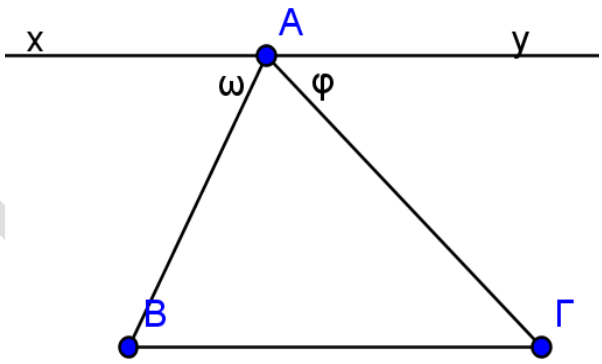
Α. Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

Β. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.



$$\beta-\gamma \le \alpha \le \beta+\gamma,\ \beta \ge \gamma$$

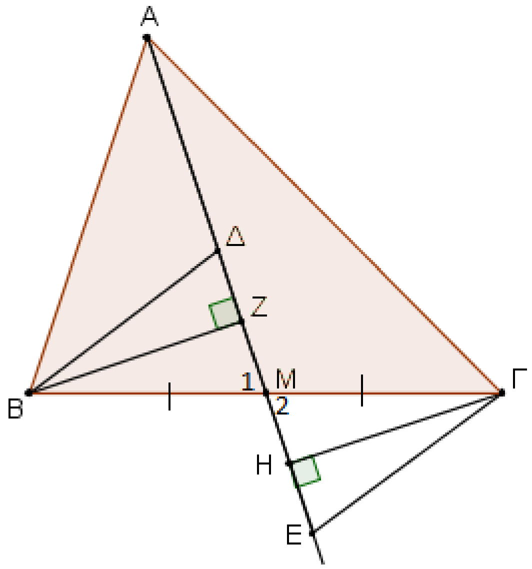
Γ. Από μία κορυφή , π.χ την Α , φέρουμε xy//ΒΓ .Τότε ω=$\hat{B}$(1) και φ=$\hat{\Gamma}$(2) , ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Αλλά $\omega+\hat{A}+\varphi=2L$ (3). Από τις (1) , (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2L$.



Δ. **i**. Σ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα 2$^{\text{ο}}$:

Α.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΔΜ, ΜΓΕ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta\text{M}=\text{ME}\ \ (\Upsilon) \\ 2.\widehat{\text{M}}_1=\widehat{\text{M}}_2\ \ (\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.\text{BM}=\Gamma\text{M}\ \ (\Upsilon) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

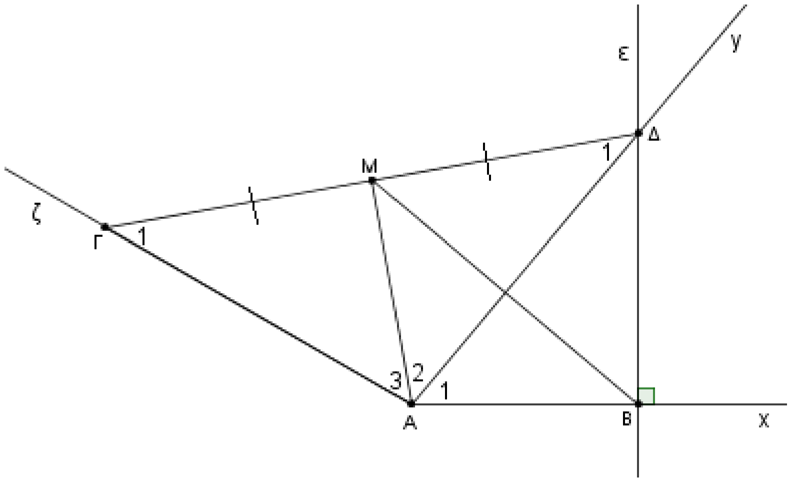
ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΖΜ, ΓΗΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\widehat{\text{M}}_1=\widehat{\text{M}}_2\,(\text{ως κατακορυφήν}) \\ 2.\text{BM}=\Gamma\text{M}\,(\Upsilon) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες άρα είναι ίσα. Οπότε ΒΖ=ΓΗ.

iii. Από την (Υ) έχουμε ότι ΔΜ=ΜΕ (1) και από το (ii) έχουμε ότι ΖΜ=ΜΗ (2). Αφαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει ότι ΔΖ=ΗΕ.

Β.



i. Έχουμε ότι: $\widehat{A}_{1,2} = \widehat{A}_{2,3} = 2\widehat{A}_1$ δηλαδή ,

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 \Leftrightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_3 (1)$ και

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 2\widehat{A}_1 \Leftrightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 (2)$

Οπότε από (1) και (2) προκύπτει ότι $\widehat{A}_2 = \widehat{A}_3 = \widehat{A}_1$.
Επίσης, γνωρίζουμε ότι ΑΓ=ΑΔ δηλαδή το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΑΜ είναι διχοτόμος του, άρα θα είναι και ύψος και διάμεσος, οπότε $AM \perp \Gamma\Delta$.

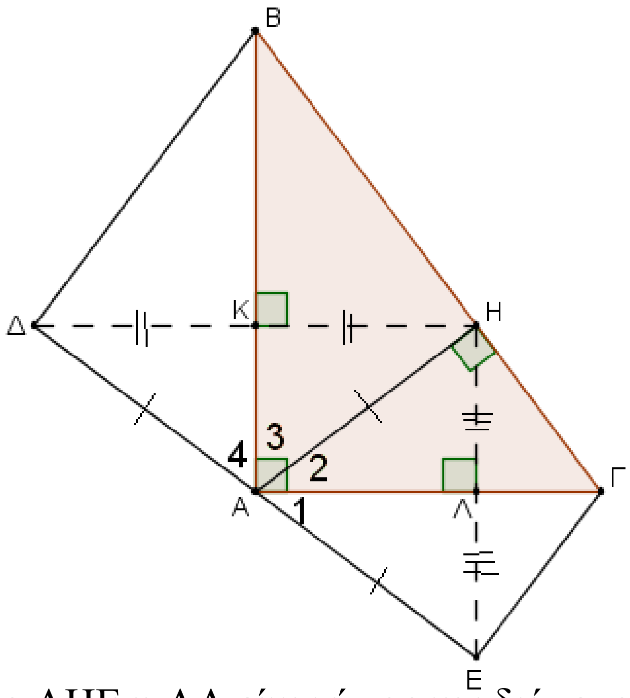
ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ, ΑΒΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \,(\mathrm{i}) \\ 2.A\Delta : \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες άρα είναι ίσα. Οπότε ΑΒ=ΑΜ. Επομένως, το Α ισαπέχει από τα Β, Μ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετό του. Επίσης από τη σύγκριση έχουμε ότι ΔΜ=ΔΒ δηλαδή το Δ ισαπέχει από τα Β και Μ, οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΜ. Εφόσον μία ευθεία ορίζεται μονοσήμαντα από δύο σημεία η ΑΔ είναι μεσοκάθετος του ΒΜ.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.



i. Στο τρίγωνο ΑΗΕ η ΑΛ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Δηλαδή ΑΕ=ΑΗ. Ομοίως στο τρίγωνο ΔΑΗ η ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δηλαδή ΔΑ=ΑΗ. Τελικά, ΔΑ=ΑΗ=ΑΕ.

ii. Εφόσον τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΔΑΗ είναι ισοσκελή, οι ΑΛ, ΑΚ θα είναι και διχοτόμοι, οπότε: $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2(1)$ και $\widehat{A}_3=\widehat{A}_4(2)$.

Τότε έχουμε: $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2+\widehat{A}_3+\widehat{A}_4=180^\circ \overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}$

$$\widehat{A}_2+\widehat{A}_2+\widehat{A}_3+\widehat{A}_3=180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\widehat{A}_2+2\widehat{A}_3=180^\circ \overset{:2}{\Leftrightarrow}$$

$$\widehat{A}_2+\widehat{A}_3=90^\circ \text{ που ισχύει}$$

Άρα τα Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.

iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΗΓ, ΑΕΓ :

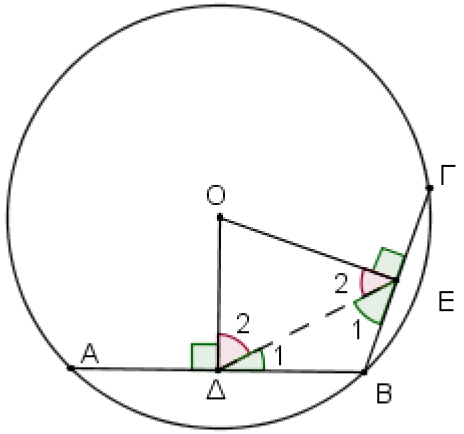
$$\left.\begin{array}{l} 1.\widehat{A}_1=\widehat{A}_2(\text{ii}) \\ 2.AH=AE(\text{i}) \\ 3.A\Gamma(\text{κοινή}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.

Οπότε $\widehat{E}=\widehat{H}=90^\circ$, δηλαδή $\Gamma E\perp \Delta E(1)$.

Ομοίως με σύγκριση των ΒΔΑ και ΒΗΑ προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}=\widehat{H}=90^\circ$, δηλαδή $\Delta B\perp \Delta E(2)$. Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΔΒ//ΓΕ.

Β.



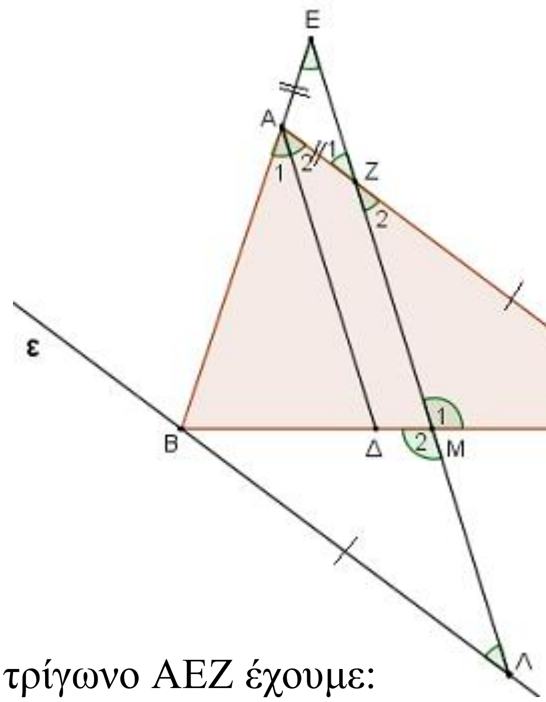
i. Έχουμε: $AB > B\Gamma \overset{:2}{\Leftrightarrow} \dfrac{AB}{2} > \dfrac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow \Delta B > BE \Leftrightarrow \hat{E}_1 > \hat{\Delta}_1$(στο τρίγωνο ΔΒΕ) εφόσον σε κάθε τρίγωνο, απέναντι από άνισες πλευρές, βρίσκονται ομοιοτρόπως άνισες γωνίες και αντίστροφα.

ii. Παρατηρούμε ότι οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\Delta}_2$, όπως και οι γωνίες $\hat{E}_1$ και $\hat{E}_2$ είναι συμπληρωματικές, εφόσον ΟΔ και ΟΕ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Τότε:

$\hat{E}_1 > \hat{\Delta}_1 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -\hat{E}_1 < -\hat{\Delta}_1 \overset{+90^\circ}{\Leftrightarrow} 90^\circ - \hat{E}_1 < 90^\circ - \hat{\Delta}_1 \Leftrightarrow \hat{E}_2 < \hat{\Delta}_2 \Leftrightarrow O\Delta < OE$ (στο τρίγωνο ΟΔΕ).

Θέμα 4ο:

Α.



i. Για το τρίγωνο ΑΕΖ έχουμε:

$\hat{E}=\widehat{A}_1 (1)$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΕΛ, ΑΔ που τέμνονται από την ΕΒ.

$\widehat{Z}_1=\widehat{A}_2 (2)$ ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΕΛ, ΑΔ που τέμνονται από την ΑΓ.

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2 (3)$ εφόσον η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α.

Από (1),(2),(3) προκύπτει ότι $\hat{E}=\hat{Z}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.

Για το τρίγωνο ΒΛΕ έχουμε:

$\hat{E}=\hat{Z}_1 (1)$ από τα παραπάνω.

$\widehat{\Lambda}=\hat{Z}_1 (2)$ ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΒΛ, ΑΓ που τέμνονται από την ΕΛ.

Από (1),(2) προκύπτει ότι $\hat{E}=\widehat{\Lambda}$, δηλαδή το τρίγωνο ΒΛΕ είναι ισοσκελές.

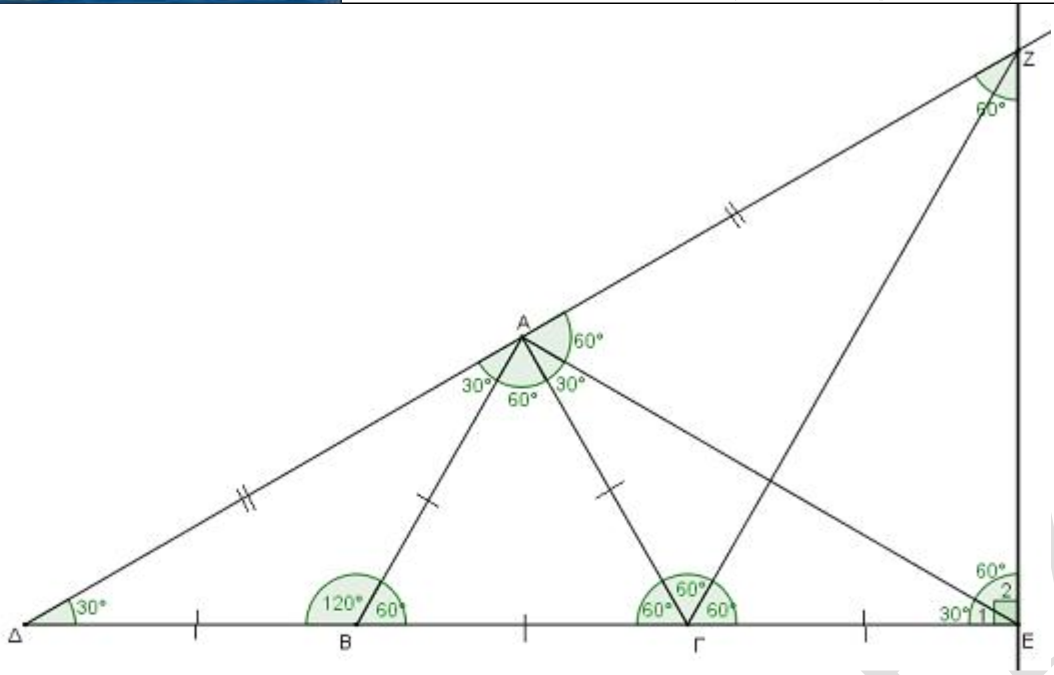
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΛΜ, ΓΖΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1. BM=M\Gamma\left(Y\right) \\ 2. \widehat{M}_1=\widehat{M}_2 (\Omega\varsigma\ \text{κατακορυφήν}) \\ 3. \widehat{\Lambda}=\hat{Z}_1=\hat{Z}_2\left(\Omega\varsigma\ \text{κατακορυφήν}\right) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Rightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Οπότε ΒΛ=ΓΖ.

iii. Έχουμε: $AE=AZ=A\Gamma-\Gamma Z \overset{\Gamma Z=B\Lambda}{=} A\Gamma-B\Lambda$.

Β.



i. Φέρουμε την ΑΕ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{E}\left(\text{Ως παραπληρώματα ίσων γωνιών}\right) \\ 2.\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma\left(\mathrm{Y}\right) \\ 3.\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}\right) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΑΔ=ΑΕ(1) και $\widehat{\Delta} = \widehat{\mathrm{E}}_1$(2).

Στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι $\widehat{\mathrm{Z}} = 90^\circ - \widehat{\Delta}$(3) και επίσης $\widehat{\mathrm{E}}_2 = 90^\circ - \widehat{\mathrm{E}}_1$(4).

Από (2),(2),(4) προκύπτει ότι: $\widehat{\mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{E}}_2$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΕ=ΑΖ(5). Από (1) και (5) έχουμε ότι: ΑΔ=ΑΖ.

ii. Έχουμε ότι $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{E} = 120^\circ$ ως παραπληρωματική της $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B}$, οπότε, εφόσον η ΓΖ τη διχοτομεί, θα είναι $\mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{Z} = 60^\circ$. Τότε $\mathrm{E}\widehat{\Gamma}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma$ και αφού οι γωνίες αυτές έχουν θέση εντός κι εναλλάξ των ΑΒ, ΓΖ που τέμνονται από την ΒΕ, θα είναι ΑΒ//ΓΖ.

iii. Το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές και $\widehat{\Gamma} = 120^\circ$. Άρα ,

$\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{E}}_1 = \dfrac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Επίσης η $\widehat{\mathrm{E}}_2$, είναι συμπληρωματική της $\widehat{\mathrm{E}}_1$, οπότε $\widehat{\mathrm{E}}_2 = 60^\circ$. Από το (i) το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές άρα θα έχει $\widehat{\mathrm{Z}} = \widehat{\mathrm{E}}_2 = 60^\circ$, οπότε και $\widehat{\mathrm{A}} = 60^\circ$, δηλαδή, το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισόπλευρο.