

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

41

Ον/μο:.....

Α' Λυκείου

Ύλη: Τρίγωνα

01-11-15

Θέμα 1^ο:

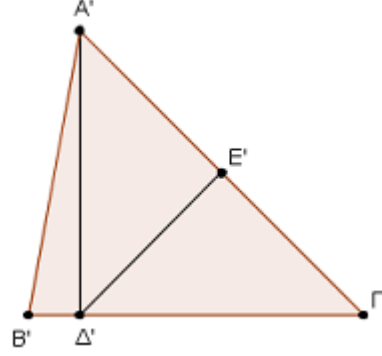
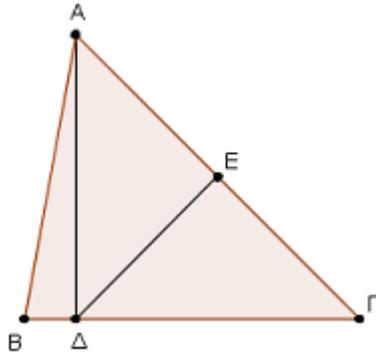
- A.** Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο; Να αναφέρετε τρεις βασικούς γεωμετρικούς τόπους τους οποίους γνωρίζετε. (7 μον.)
- B.** Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. (8 μον.)
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- i.** Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες και μία πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Σ Λ
 - ii.** Το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και διάμεσος. Σ Λ
 - iii.** Ο κύκλος έχει άπειρους άξονες συμμετρίας. Σ Λ
 - iv.** Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$, έχουν $A = A' = 90^\circ$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ και $\Gamma = \Gamma'$, τότε είναι ίσα. Σ Λ
 - v.** Μία ευθεία $x'x$ έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία $\varepsilon \perp x'x$ και την ίδια τη $x'x$. Σ Λ
- (5x2=10μον.)

Θέμα 2^ο:

- A.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB , η μεσοκάθετός του (ε) και σημείο M της ε . Στις προεκτάσεις των AM και BM παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ , Δ ώστε $M\Gamma = M\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- i.** $AMK = BMK$, όπου K το σημείο τομής της (ε) με το AB .
 - ii.** $A\Delta = B\Gamma$.
 - iii.** $\triangle A\hat{B}\Delta = \triangle A\hat{B}\Gamma$.
- (5x3=15 μον.)
- B.** Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό. (10 μον.)

Θέμα 3^ο:

A. Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε $AD \perp B\Gamma$ και $DE \perp AG$ και σε οξυγώνιο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ φέρουμε $A'D' \perp B'\Gamma'$ και $\Delta'E' \perp A'\Gamma'$. Αν είναι $B = B'$, $AD = A'D'$ και $DE = \Delta'E'$, να αποδείξετε ότι:



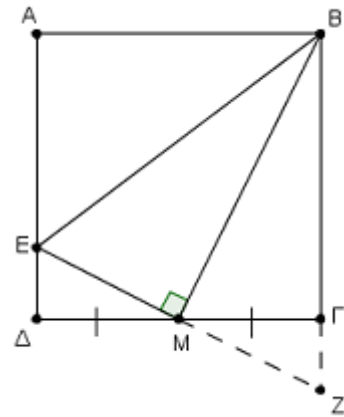
- i. Τα τρίγωνα $A\Delta B$ και $A'\Delta'B'$ είναι ίσα.
- ii. Τα τρίγωνα AED και $A'E'\Delta'$ είναι ίσα.
- iii. $B\Gamma = B'\Gamma'$.

(5 μον.)

(5 μον.)

(7 μον.)

B. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και το μέσο M της πλευράς $\Gamma\Delta$. Η κάθετη στη BM στο M , τέμνει την AD στο E . Να δείξετε ότι η BM είναι διχοτόμος της γωνίας $EB\Gamma$.



(8 μον.)

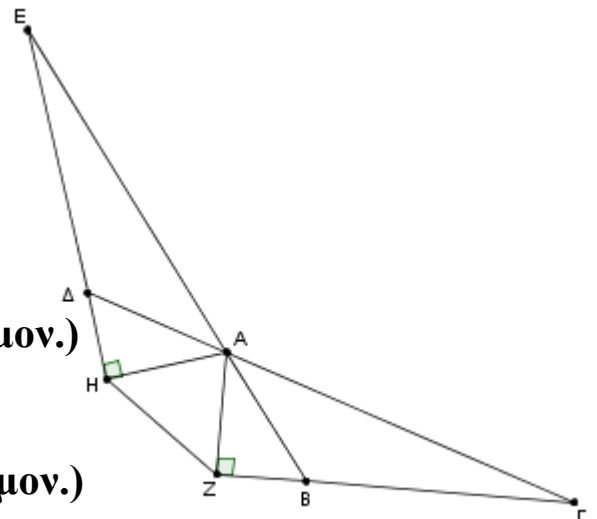
Θέμα 4^ο:

A. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στις προεκτάσεις των πλευρών του BA και ΓA θεωρούμε τμήματα $AE=AG$ και $AD=AB$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $AE\Delta$ είναι ίσα. (5 μον.)

ii. Οι αποστάσεις AZ και AH του A από τις $B\Gamma$ και $E\Delta$ αντίστοιχα είναι ίσες. (7 μον.)

iii. Η διχοτόμος της γωνίας HAZ είναι μεσοκάθετος του τμήματος HZ . (6 μον.)



B. Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη μεσοκάθετο της $B\Gamma$ στο σημείο Δ . Έστω E και Z οι προβολές του Δ στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔBE και $\Delta \Gamma Z$ είναι ίσα. (7 μον.)

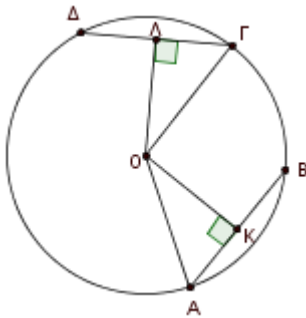
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^ο:

A. Γεωμετρικό τόπο ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν μία κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι είναι η διχοτόμος, η μεσοκάθετος και ο κύκλος.

B.



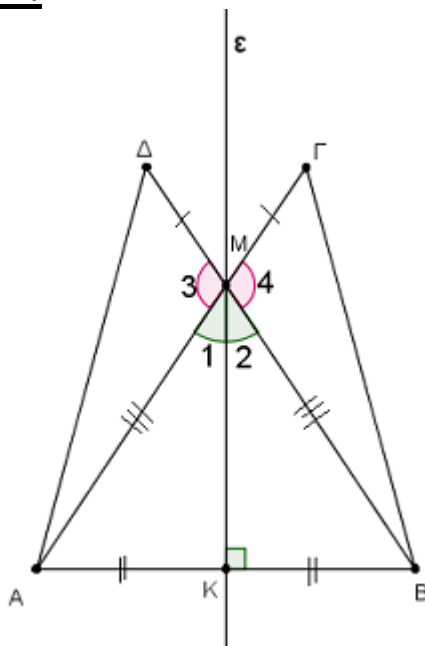
($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές AB και ΓΔ ενός κύκλου (O,ρ) και OK , OL τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα KOA και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, OA=ΟΓ(=ρ) και AK=ΓΛ(αφού AB=ΓΔ). Επομένως είναι ίσα , οπότε OK=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα OK και OL είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα KOA και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{L} = 90^\circ$, OA=ΟΓ(=ρ) και OK=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , $AK=ΓΛ \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{ΓΔ}{2} \Leftrightarrow AB = ΓΔ$.

Γ. i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ v. Σ

Θέμα 2^ο:

Α.



- i. Εφόσον η ϵ είναι μεσοκάθετος του AB θα είναι $MA=MB$ δηλαδή, το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές και η MK είναι διάμεσος και ύψος προς τη βάση του ισοσκελούς τριγώνου, επομένως θα είναι και διχοτόμος.

Οπότε $AMK = BMK$.

- ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΔMA , ΓMB :

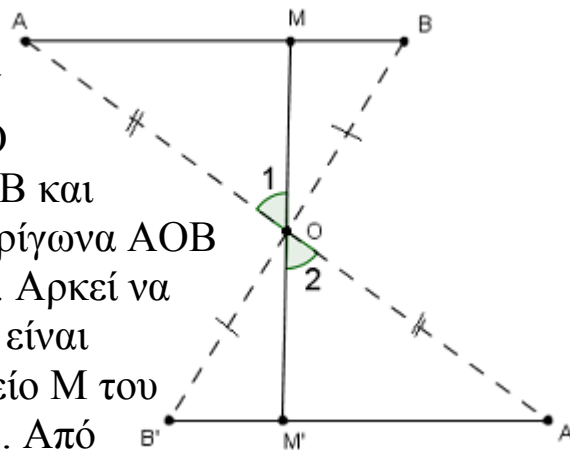
$$\left. \begin{array}{l} 1. \Delta M = \Gamma M \text{ (Y)} \\ 2. \angle 3 = \angle 4 \text{ (ως κατακορυφήν)} \\ 3. MA = MB \text{ (Y)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Π-Γ-Π} \\ \Rightarrow \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.} \end{array}$$

Επομένως, όλα τους τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα, άρα $A\Delta = B\Gamma$.

- iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$, $AB\Gamma$:

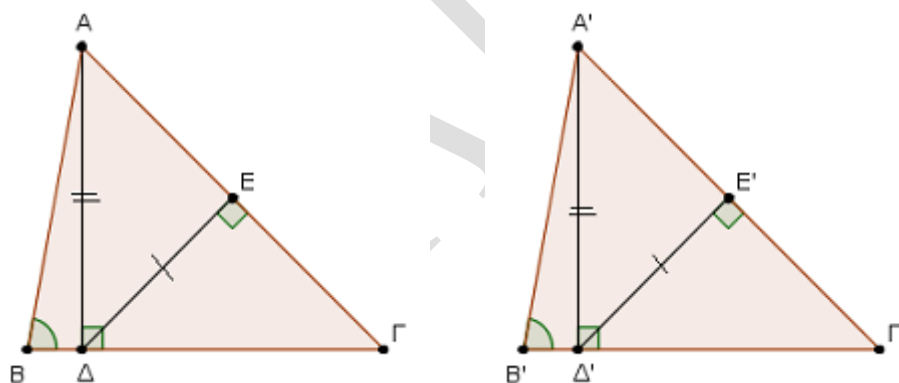
$$\left. \begin{array}{l} 1. A\Delta = B\Gamma \text{ (προηγ. σύγκριση)} \\ 2. AB \text{ (κοινή πλευρά)} \\ 3. B\Delta = A\Gamma \text{ (ως αθροίσματα ίσων πλευρών)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Π-Π-Π} \\ \Rightarrow \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.} \end{array}$$

B. Έστω τμήμα AB , σημείο O που δεν ανήκει στην ευθεία AB και A', B' τα συμμετρικά των A, B ως προς το O αντίστοιχα. Επειδή $OA' = OA$, $OB' = OB$ και οι γωνίες $\angle A'OB'$, $\angle AOB$ είναι ίσες, τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle A'OB'$ είναι ίσα. Οπότε $A'B' = AB$. Αρκεί να δείξουμε ότι τα τμήματα $A'B'$ και AB είναι συμμετρικά ως προς το O . Έστω σημείο M του AB και M' η τομή της MO με το $A'B'$. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι οι γωνίες $\angle A'$ και $\angle A$ είναι ίσες, οπότε τα τρίγωνα $\triangle AOM$ και $\triangle A'OM'$ είναι ίσα διότι έχουν $OA' = OA$, γωνία $\angle A' = \angle A$ και γωνία $\angle O_1 = \angle O_2$. Επομένως $OM' = OM$ που σημαίνει ότι το M' είναι το συμμετρικό του M . Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου M' του $A'B'$ είναι σημείο του AB . Άρα τα AB , $A'B'$ είναι συμμετρικά ως προς το O .



Θέμα 3^ο:

A.



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ADB$, $\triangle A'D'B'$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. B = B' (Y) \\ 2. AD = A'D' (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες άρα είναι ίσα.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AED$, $\triangle A'E'D'$:

$$\left. \begin{array}{l} 1. DE = D'E' (Y) \\ 2. AD = A'D' (Y) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.

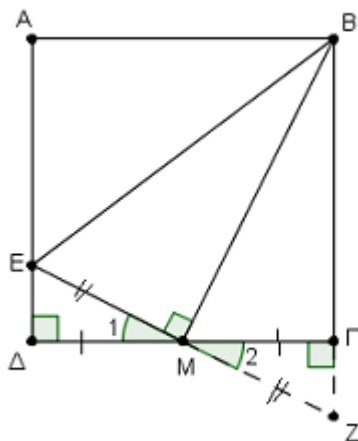
iii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$:

1. $B = B'$ (Y)
2. $AB = A'B'$ (προγ. σύγκριση)
3. $A = A'$ (ως άθροισμα ίσων γωνιών σύγκρ. i, ii)

$\left. \begin{array}{l} \Gamma-\Pi-\Gamma \\ \Rightarrow \end{array} \right\}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα.
Οπότε $B\Gamma = B'\Gamma'$.

B.



Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα: $E\Delta M$, $M\Gamma Z$:

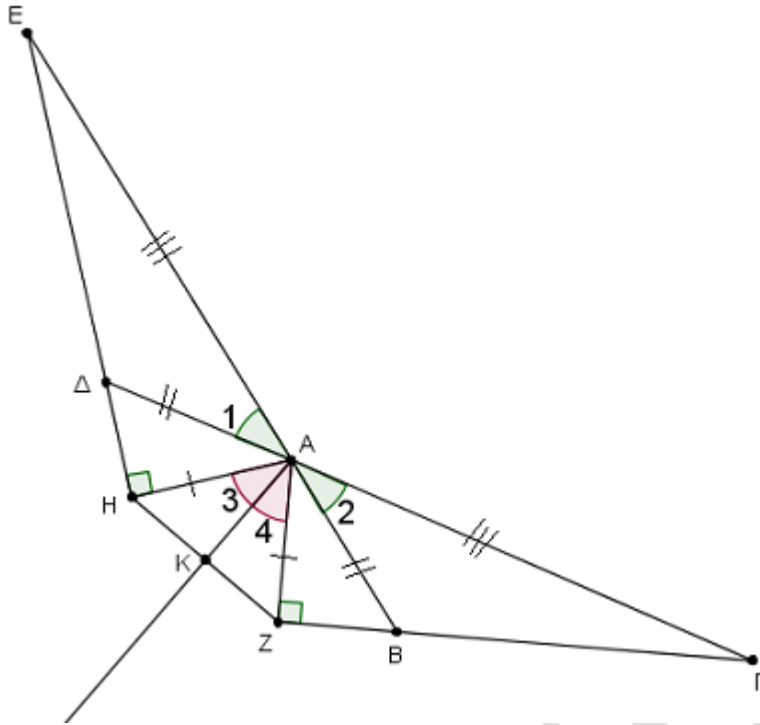
1. $\Delta M = M\Gamma$ (Y)
2. $M_1 = M_2$ (ως κατακορυφήν)

$\Rightarrow$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες, άρα είναι ίσα. Τότε στο τρίγωνο BEZ είναι $BM \perp EZ$ και $EM = MZ$ δηλαδή η BM είναι μεσοκάθετος του EZ . Οπότε το τρίγωνο BEZ είναι ισοσκελές, άρα η BM θα είναι και διχοτόμος.

Θέμα 4^ο:

Α.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΕΑΔ, ΒΑΓ:

$$1. EA = AG (Y)$$

$$2. AD = AB (Y)$$

$$3. A_1 = A_2 (\text{ως κατακορυφήν})$$

Π-Γ-Π

$\Leftrightarrow$ Τα τρίγωνα είναι ίσα.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΗΑ, ΓΖΑ:

$$1. EA = AG (Y)$$

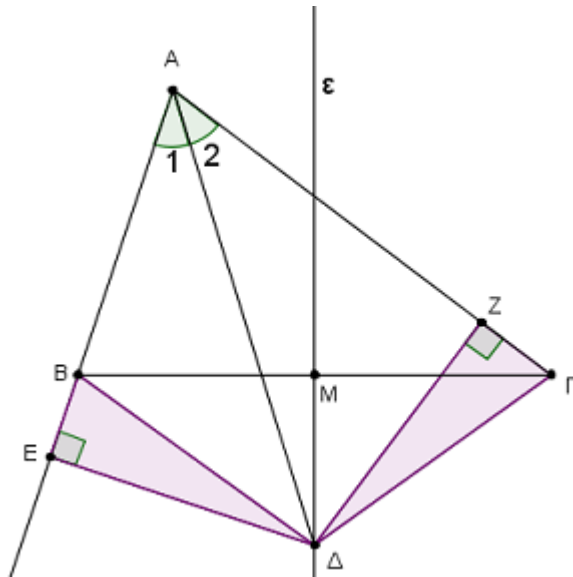
$$2. \hat{E} = \hat{G} (\text{προηγ. σύγκριση})$$

$\Rightarrow$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε $AH = AZ$.

iii. Η ΑΚ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΗΖ που από την προηγούμενη σύγκριση έχει προκύψει ότι είναι ισοσκελές. Επομένως η ΑΚ θα είναι και διάμεσος και ύψος του τριγώνου, δηλαδή μεσοκάθετος του ΗΖ.

B.



Το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Α, άρα θα ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας Α. Οπότε $\Delta E = \Delta Z$ (1).

Επίσης, το Δ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ, άρα θα ισαπέχει από τα άκρα του ΒΓ, δηλαδή $\Delta B = \Delta \Gamma$ (2).

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΒ, ΔΖΓ:

$$\left. \begin{array}{l} 1. \Delta E = \Delta Z (1) \\ 2. \Delta B = \Delta \Gamma (2) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα.