ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **40**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα, Παράλληλες ευθείες **25-01-15**

Θέμα 1^{o}:

Α. Ποιες είναι οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων; **(5 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μίας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας και αντίστροφα. **(8 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. **(7 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών ενός τριγώνου. **Σ Λ**

ii. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

iii. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία αποκλείεται να είναι συμπληρωματικές. **Σ Λ**

iv. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο γωνιών του τριγώνου. **Σ Λ**

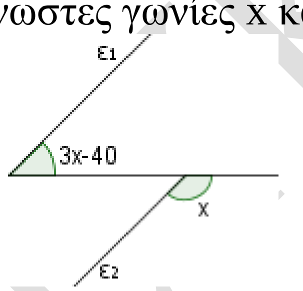
v. Το άθροισμα των κυρτών γωνιών εξαγώνου είναι 720°. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

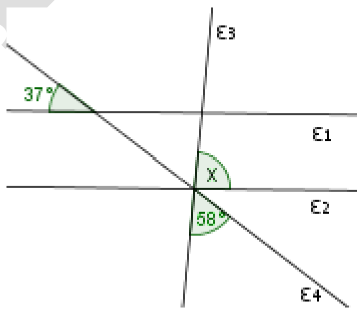
Θέμα 2^{o}:

Α. Στα παρακάτω σχήματα, αν γνωρίζετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$, να βρείτε τις άγνωστες γωνίες x και y.

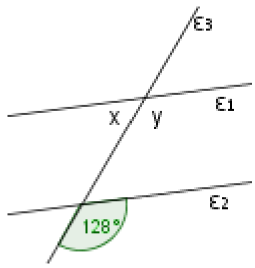
i.



ii.



iii.



(3x4=12 μον.)

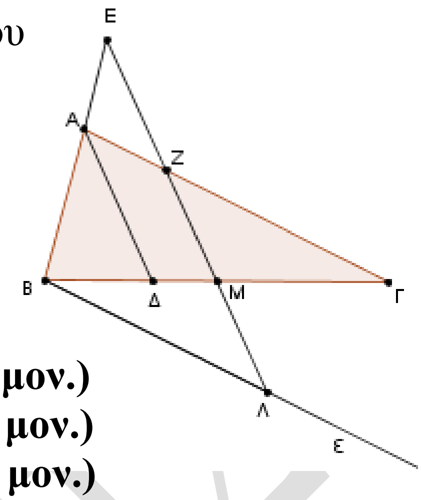
Β. Από σημείο Μ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ ενός κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΚ, ΜΛ προς τον κύκλο. Έστω Δ, Ε αντίστοιχα τα σημεία τομής των εφαπτόμενων ΜΚ, ΜΛ με την εφαπτόμενη του κύκλου στο Α. Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. **(6 μον.)**

ii. Η περίμετρος του τριγώνου ΜΔΕ είναι 2(ΜΚ+ΔΕ). **(7 μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και η ευθεία ε παράλληλη από το Β προς την ΑΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ζ, την ευθεία ε στο σημείο Λ και την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Ε.



να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΒΛΕ είναι ισοσκελή. **(4 μον.)**

ii. ΒΛ=ΓΖ. **(5 μον.)**

iii. ΑΕ=ΑΓ-ΒΛ. **(4 μον.)**

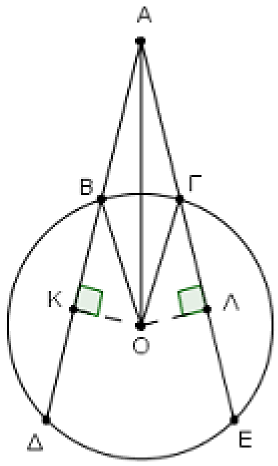
Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ=υ_α. Να αποδείξετε ότι:

i. $\upsilon_\alpha < \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. **(6 μον.)**

ii. $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau$. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

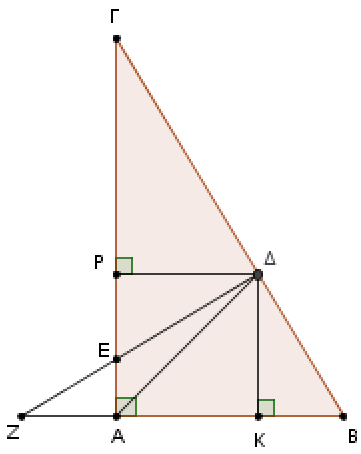
Α. Ένα σημείο Α βρίσκεται εκτός κύκλου και ισαπέχει από δύο σημεία Β και Γ αυτού. Αν οι ευθείες ΑΒ και ΑΓ επανατέμνουν τον κύκλο στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι:



i. Οι χορδές ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες. **(7 μον.)**

ii. Οι χορδές ΒΓ και ΔΕ είναι παράλληλες. **(5 μον.)**

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$, φέρνουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Έστω ΔΚ και ΔΡ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η κάθετη της ΒΓ στο σημείο Δ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε και την προέκταση της πλευράς ΒΑ στο σημείο Ζ.



i. Να αποδείξετε ότι: $\hat{B} = \Delta\hat{E}\Gamma$. **(4 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι: ΔΕ=ΔΒ. **(4μον.)**

iii. Να υπολογίσετε τη γωνία ΔΓΖ. **(5 μον.)**

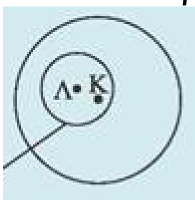
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

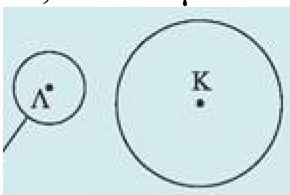
Θέμα 1ο:

Α. Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

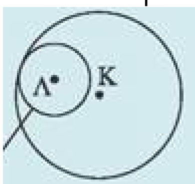
* Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R) αν και μόνο αν δ<R-ρ.



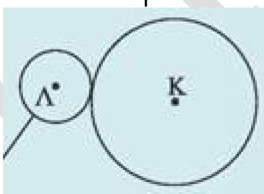
* Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν δ>R+ρ.



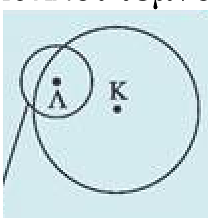
* Οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, αν και μόνο αν δ=R-ρ.



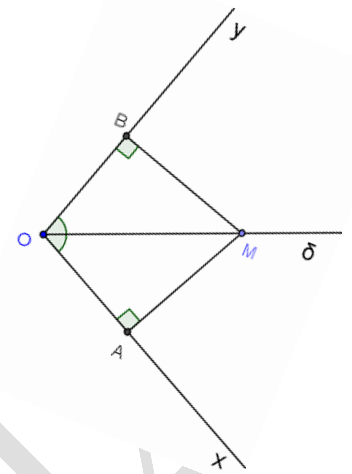
* Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, αν και μόνο αν δ=R+ρ.



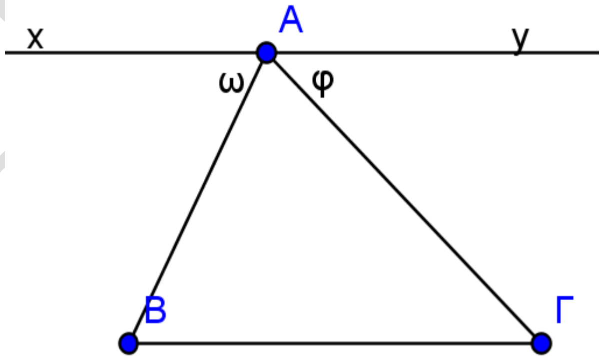
* Οι κύκλοι τέμνονται, αν και μόνο αν R-ρ<δ<R+ρ.



Β. Έστω μία γωνία $\hat{xOy}$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$.
Επομένως, ΜΑ=ΜΒ.
Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι ΜΑ=ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΜ κοινή και ΜΑ=ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.



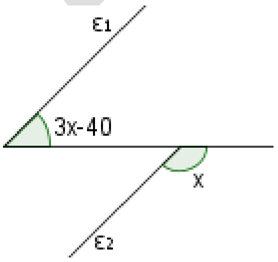
Γ. Από μία κορυφή, π.χ την Α, φέρουμε xy//ΒΓ. Τότε ω=$\hat{B}$(1) και φ=$\hat{\Gamma}$(2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2L$ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$.



Δ. **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Λ **v.** Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

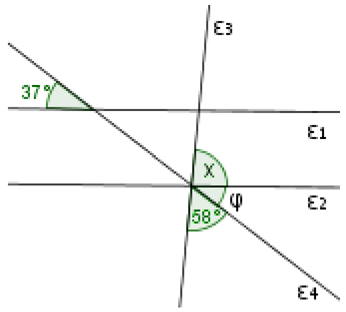
Α.i.



Οι γωνίες 3x-40 και x είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες, και είναι μία οξεία και μία αμβλεία, άρα θα είναι παραπληρωματικές. Οπότε έχουμε:

$$3\hat{x} - 40^\circ + \hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow 4\hat{x} = 220^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 55^\circ.$$

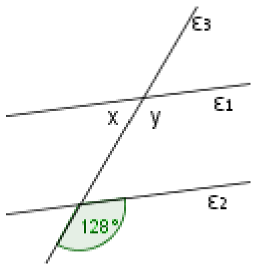
ii.



Η $\hat{\varphi}=37^\circ$ ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ε_4. Επίσης έχουμε:

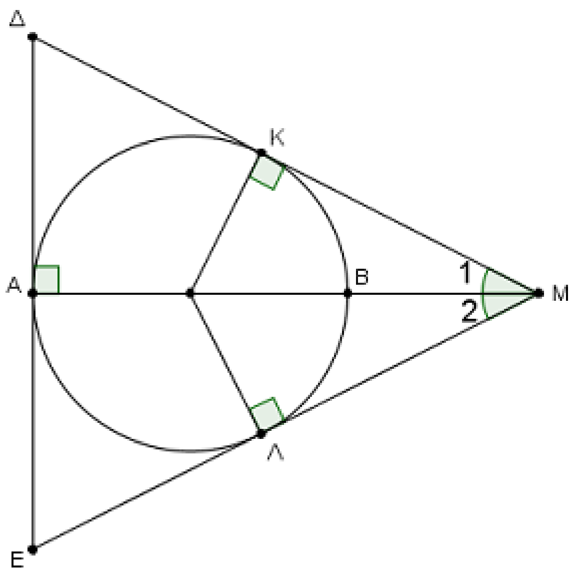
$$\hat{\varphi}+\hat{x}+58^\circ=180^\circ \Leftrightarrow \hat{x}=180^\circ-\left(58^\circ+37^\circ\right)\Leftrightarrow \hat{x}=85^\circ$$

iii.



Είναι $\hat{y}=128^\circ$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ε_1, ε_2 που τέμνονται από την ε_3.Τέλος, οι γωνίες x και y είναι παραπληρωματικές, οπότε: $\hat{x}=180^\circ-128^\circ=52^\circ$.

B.



i. Εφόσον ΜΚ, ΜΛ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου, θα είναι $\hat{M}_1=\hat{M}_2$. Οπότε στο τρίγωνο ΜΔΕ η ΜΑ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

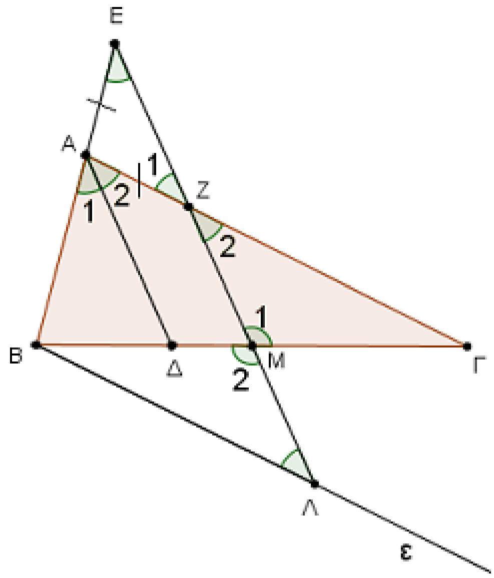
ii. Για την περίμετρο του τριγώνου έχουμε:

$$\Pi=M\Delta+\Delta E+ME\overset{ME=M\Delta}{=}MK+K\Delta+\Delta E+MK+K\Delta\overset{K\Delta=\Delta A=AE}{=}$$

$$=MK+\Delta A+\Delta E+MK+AE=2MK+2\Delta E=2\left(MK+\Delta E\right).$$

Θέμα 3ο:

Α.



i. Στο τρίγωνο ΑΕΖ είναι $\hat{E} = \hat{A}_1$ **(1)**, ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΔ,ΕΜ που τέμνονται από την ΕΒ. Επίσης, $\hat{Z} = \hat{A}_2$ **(2)**, ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΕΜ που τέμνονται από την ΑΓ. Εφόσον η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, θα είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ **(3)**. Οπότε από **(1), (2), (3)** έπεται ότι $\hat{Z} = \hat{E}$**,** δηλαδή το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές. Στο τρίγωνο ΒΛΕ έχουμε $\hat{Z} = \hat{\Lambda}$ **(4)**, ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ε, ΑΓ που τέμνονται από την ΕΛ. Όμως, $\hat{Z} = \hat{E}$ άρα $\hat{\Lambda} = \hat{E}$, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

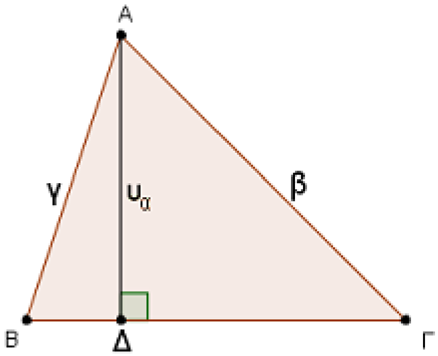
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΒΛΜ, ΖΜΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{Z} = \hat{\Lambda}\left(\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 \text{ ως κατακορυφήν}\right) \\ 2.\text{ΒΜ} = \text{ΜΓ}\left(\text{Μ} : \text{μέσο της ΒΓ}\right) \\ 3.\hat{B} = \hat{\Gamma}\left(\begin{array}{l}\text{ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των} \\ \text{παραλλήλων ΒΛ, ΑΓ που τέμνονται} \\ \text{από τη ΒΓ.}\end{array}\right) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Leftrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε ΒΛ=ΓΖ.

iii. Είναι $AE = AZ = A\Gamma - \Gamma Z \overset{B\Lambda=\Gamma Z}{=} A\Gamma - B\Lambda$.

B. i.



Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι $\upsilon_\alpha < \gamma$ **(1)** (γ: υποτείνουσα).
Στο τρίγωνο ΑΓΔ είναι $\upsilon_\alpha < \beta$ **(2)** (γ: υποτείνουσα).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις **(1), (2)** έχουμε :

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow 2\upsilon_\alpha < \beta + \gamma \Leftrightarrow \upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

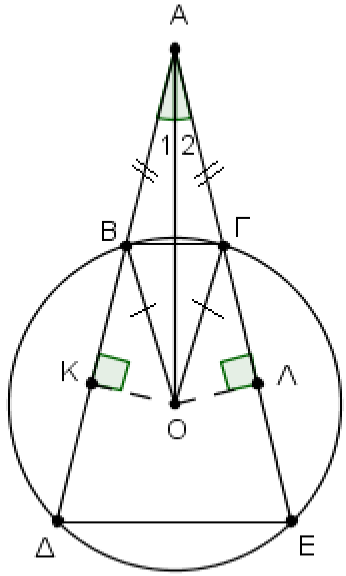
ii. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_\alpha &< \frac{\beta+\gamma}{2} \\ \upsilon_\beta &< \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ \upsilon_\gamma &< \frac{\beta+\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{\beta+\gamma+\alpha+\gamma+\beta+\alpha}{2} \Leftrightarrow$$

$$\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)}{2} \Leftrightarrow \upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < 2\tau.$$

Θέμα 4^{o}:

Α.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΟ, ΑΓΟ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}(\mathrm{Y}) \\ 2.\mathrm{AO}: \text{κοινή} \\ 3.\mathrm{BO}=\mathrm{O\Gamma}(\text{ως ακτίνες του κύκλου}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Leftrightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΚ, ΑΟΛ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AO}: \text{κοινή} \\ 2.\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2(\text{προηγ. σύγκριση}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

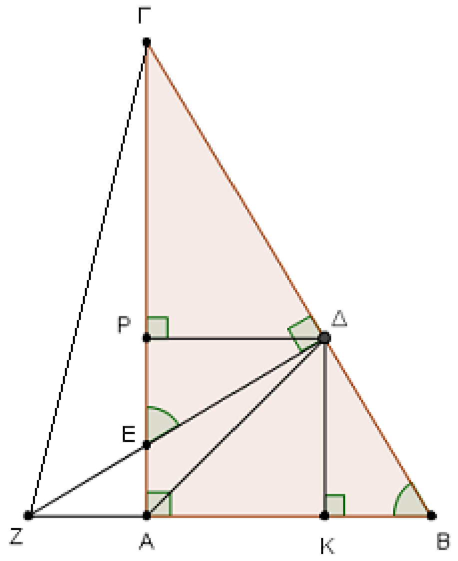
Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Τότε τα αποστήματα ΟΚ, ΟΛ των χορδών ΒΔ,ΓΕ είναι ίσα άρα θα είναι ΒΔ=ΓΕ.

ii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) άρα $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\dfrac{180^{\circ}-\hat{\mathrm{A}}}{2}$ **(1)**

Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές (ΑΔ=ΑΕ ως αθροίσματα ίσων πλευρών) άρα $\hat{\Delta}=\hat{\mathrm{E}}=\dfrac{180^{\circ}-\hat{\mathrm{A}}}{2}$ **(2)**.

Από **(1), (2)** προκύπτει ότι $\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Delta}$ και έχουν θέση εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη στις ευθείες ΒΓ, ΔΕ που τέμνονται από την ΑΔ, οπότε ΒΓ//ΔΕ.

Β.



i. Για τις γωνίες Β και ΔΕΓ έχουμε ότι $\Delta E \perp B\Delta$ και $BK \perp A\Gamma$, άρα είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες. Οπότε είναι ίσες.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΡΕ, ΔΚΒ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta P = \Delta K\,(A\Delta : \text{διχοτόμος}) \\ 2.\hat{E} = \hat{B}(\text{i}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, οπότε ΔΕ=ΔΒ.

iii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΓΕ, ΔΒΖ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta E = \Delta B(\text{ii}) \\ 2.\hat{E} = \hat{B}(\text{i}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, οπότε ΔΓ=ΔΖ.
Τότε το τρίγωνο ΔΓΖ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε:

$$\Delta\hat{\Gamma}Z = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$