ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **4**

Β' Λυκείου

Ον/μο:……………………… **ΕΠΑ.Λ.**

Ύλη: Συστήματα **08-10-16**

Θέμα 1^{o}:

Α. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(15 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα μη γραμμικό σύστημα λύνεται με τη μέθοδο της αντικατάστασης ή με τη μέθοδο των οριζουσών. **Σ** **Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma' \end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ** **Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases} xy=8 \\ x+y=6 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ** **Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ** **Λ**

v. Αν ένα σύστημα έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ** **Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} x+2y=9 \\ 3x-7y=1 \end{matrix}\right\}$ **(12 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix} 2x+y+\omega=3 \\ x-y+\omega=0 \\ 3x-2y+2\omega=-1 \end{matrix}\right\}$ **(13 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{array}\right\}$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(15 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+\omega=-2 \\ \omega+x=11 \end{array}\right\}$

(10 μον.)

Θέμα 4ο:

Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} \lambda x+y=1 \\ x+\lambda y=-1 \end{array}\right\}$

Α. Να βρείτε τις ορίζουσες του συστήματος. **(10 μον.)**
Β. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ. **(15 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}:

Α. Γραμμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

Β. **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2^{ο}:

Α. Είναι: $\left.\begin{aligned} x+2y&=9\\ 3x-7y&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x&=9-2y\\ 3(9-2y)-7y&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x&=9-2y\\ 27-6y-7y&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{aligned} x&=9-2y\\ -13y&=-26\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x&=9-2y\\ \frac{-13y}{-13}&=\frac{-26}{-13}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x&=9-2\cdot 2\\ y&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} x&=5\\ y&=2\end{aligned}\right\}$

Άρα (x,y)=(5,2).

Β. Έχουμε : $\left.\begin{aligned} 2x+y+\omega&=3 \quad \textbf{(1)}\\ x-y+\omega&=0 \quad \textbf{(2)}\\ 3x-2y+2\omega&=-1 \quad \textbf{(3)}\end{aligned}\right\}(\Sigma)$

$\left.\begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} 2x+y+\omega&=3\\ x-y+\omega&=0\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow} 3x+2\omega=3$ **(4)**

$\left.\begin{aligned}(3)\\(2)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned} 3x-2y+2\omega&=-1\\ x-y+\omega&=0\end{aligned}\right\}\underset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned} 3x-2y+2\omega&=-1\\ -2x+2y-2\omega&=0\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}$ **x=-1**.

Τότε από την **(4)** έχουμε:

$3(-1)+2\omega=3\Leftrightarrow -3+2\omega=3\Leftrightarrow 2\omega=6\Leftrightarrow$ **ω=3**. Όμοια από την **(2)** είναι: $-1-y+3=0\Leftrightarrow$ **y=2**.

Η λύση του (Σ) είναι (x,y,ω)=(-1,2,3).

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

A. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 4. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-5\omega+4=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=1 ή ω=4 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (1,4) ή (4,1) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

B. Είναι: $\left.\begin{matrix} x+y=5 \quad (1) \\ y+\omega=-2 \ (2) \\ \omega+x=11 \ (3) \end{matrix}\right\}$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) και έχουμε:

$x+y+y+\omega+\omega+x=5-2+11 \Leftrightarrow 2x+2y+2\omega=14 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+\omega=7$**(4)**

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1),(2), (3).

$(\mathbf{4})$-$(\mathbf{1}) \Rightarrow x+y+\omega-x-y=7-5 \Leftrightarrow$ **ω=2**.

$(\mathbf{4})$-$(\mathbf{2}) \Rightarrow x+y+\omega-y-\omega=7+2 \Leftrightarrow$ **x=9**.

$(\mathbf{4})$-$(\mathbf{3}) \Rightarrow x+y+\omega-\omega-x=7-11 \Leftrightarrow$ **y=-4**.

Άρα η λύση του συστήματος είναι (x,y,ω)=(9,-4,2).

Θέμα 4ο:

Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{aligned} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{aligned}\right\}$

Α. Οι ορίζουσες του συστήματος είναι :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 1 = -(\lambda + 1)$$

Β. * Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \pm 1.$

Τότε, το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) =$

$$= \left(\frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}, -\frac{\lambda + 1}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)}\right) = \left(\frac{1}{\lambda - 1}, -\frac{1}{\lambda - 1}\right).$$

*Αν $D = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1.$

→ Αν λ=1 τότε $D_x = 2 \neq 0$, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

→ Αν λ==-1 τότε $D_x = D_y = 0$, οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για λ=-1 γίνεται:

$\left.\begin{aligned} -x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{aligned}\right\}$. Επομένως, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(x,1+x), $x \in \mathbb{R}$.