ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **3**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **ΕΠΑ.Λ.**

Ύλη: Αναλογίες- Ομοιότητα- Μετρικές σχέσεις **15-02-16**

Θέμα 1^{ο}:

Α.i. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. **(5 μον.)**

ii. Πότε δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα γ και δ; **(4 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του, είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας, επί την προβολή της πλευράς αυτής πάνω στην υποτείνουσα. **(6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τα β και γ λέγονται άκροι όροι. **Σ** **Λ**

ii. Αν τρεις τουλάχιστον ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα. **Σ** **Λ**

iii. Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων, ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους. **Σ** **Λ**

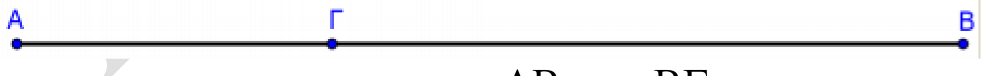
iv. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε είναι όμοια. **Σ** **Λ**

v. Για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A$. **Σ** **Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ=12κ και ΓΒ=8κ.



i. Να υπολογίσετε τους λόγους $\frac{AB}{\Gamma B}$ και $\frac{B\Gamma}{AB}$. **(5 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε το ΑΓ συναρτήσει του κ. **(4 μον.)**

iii. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}$. Σε τι λόγο διαιρείται εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το σημείο Γ; **(4 μον.)**

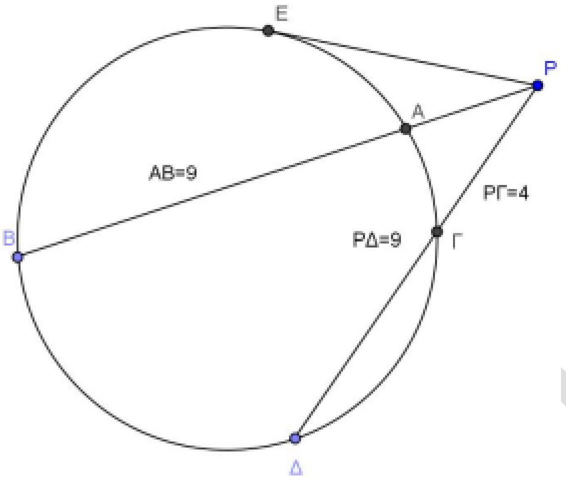
Β. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ=3, ΒΓ=4 και ΑΓ=6.

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία ΒΑΓ είναι οξεία. **(6 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο και να βρείτε ποια είναι η αμβλεία του γωνία. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 3^o:</u>

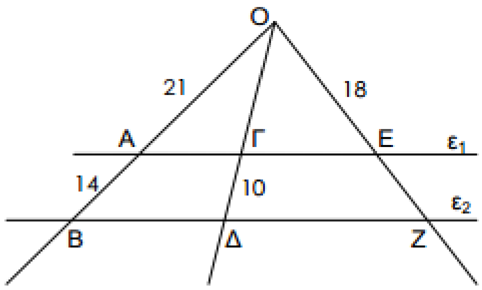
Α. Στο παρακάτω σχήμα το τμήμα ΡΕ είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι ΡΒ και ΡΔ τέμνουσες αυτού.



i. Να υπολογίσετε το ΡΕ. **(7 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε το ΡΑ. **(6 μον.)**

Β. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Επίσης είναι ΟΑ=21, ΑΒ=14, ΓΔ=10 και ΟΕ=18.

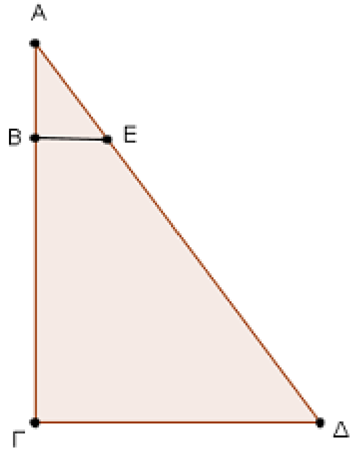


i. Να υπολογίσετε το τμήμα ΟΓ. **(6 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε το τμήμα ΕΖ. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 4^o:</u>

Στο παρακάτω σχήμα, το τμήμα ΑΓ είναι το τριπλάσιο του ΑΒ και το τμήμα ΑΔ είναι το τριπλάσιο του ΑΕ. Επίσης ισχύει ότι ΓΔ=9.



Α. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ και ΓΔ είναι παράλληλες. **(6 μον.)**

Β. i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. **(8 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ. **(5 μον.)**

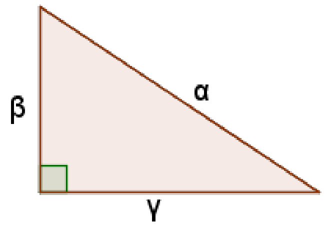
Γ. Αν ΑΓ=12 και ΑΕ=5 να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

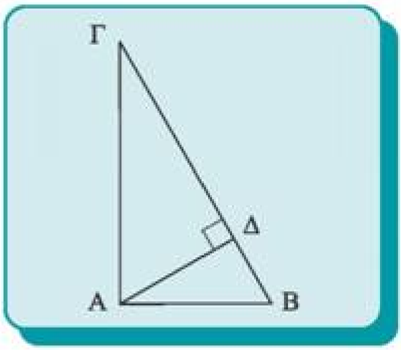
Θέμα 1ο:

Α. i. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών. Δηλαδή: $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$



ii. Δύο ευθύγραμμα τμήματα α και β λέγονται ανάλογα προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα γ και δ όταν οι λόγοι τους είναι ίσοι, δηλαδή: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$.

iii. Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2=B\Gamma\cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2=B\Gamma\cdot\Gamma\Delta$. Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta}=\frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια το οποίο ισχύει αφού $\hat{A}=\hat{\Delta}=1L$ και η γωνία Β είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη σχέση.



Β. **i.**Λ **ii.**Λ **iii.** Σ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α.i. $\frac{AB}{\Gamma B}=\frac{12\kappa}{8\kappa}=\frac{3}{2}$ και $\frac{B\Gamma}{AB}=\frac{8\kappa}{12\kappa}=\frac{2}{3}$.

ii. ΑΓ=ΑΒ-ΓΒ=12κ-8κ=4κ.

iii. $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{4\kappa}{8\kappa}=\frac{1}{2}$. Ο λόγος με τον οποίο διαιρείται εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ από το σημείο Γ είναι $\lambda=\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{1}{2}$.

Β. i. Για να είναι η γωνία ΒΑΓ οξεία πρέπει:

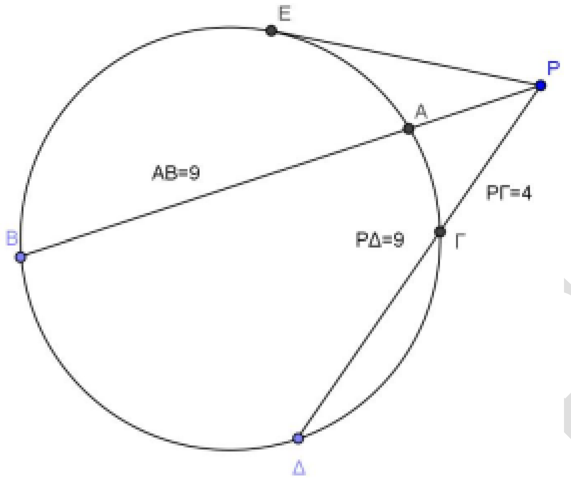
$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow 4^2 < 3^2 + 6^2 \Leftrightarrow 16 < 9 + 36 \Leftrightarrow 16 < 45$ που ισχύει.

ii. Για να είναι αμλυγώνιο το τρίγωνο πρέπει η γωνία Β που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά να είναι αμβλεία. Πράγματι:

$\beta^2 > \alpha^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow 6^2 > 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 36 > 9 + 16 \Leftrightarrow 36 > 25$. Άρα η γωνία Β είναι αμβλεία και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

Θέμα 3^{o}:

Α.



i. Είναι $PE^2 = P\Gamma \cdot P\Delta \Leftrightarrow PE^2 = 4 \cdot 9 \Leftrightarrow PE^2 = 36 \Leftrightarrow PE = 6$.

ii. Έχουμε: $PE^2 = PA \cdot PB \Leftrightarrow 6^2 = PA \cdot (PA + 9) \Leftrightarrow 36 = PA^2 + 9PA \Leftrightarrow$

$PA^2 + 9PA - 36 = 0$

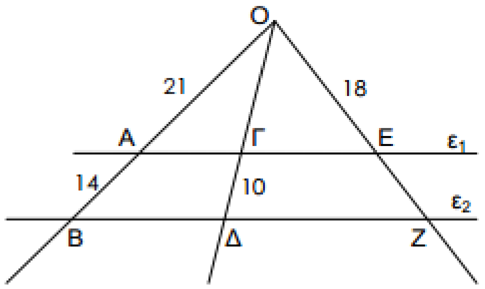
Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 225 > 0$.

Άρα έχει δύο άνισες λύσεις τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-9 \pm 15}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-9+15}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{-9-15}{2} = -\dfrac{24}{2} = -12 \alpha\pi o\rho. \end{array} \right.$$

Επομένως ΡΑ=3.

Β.



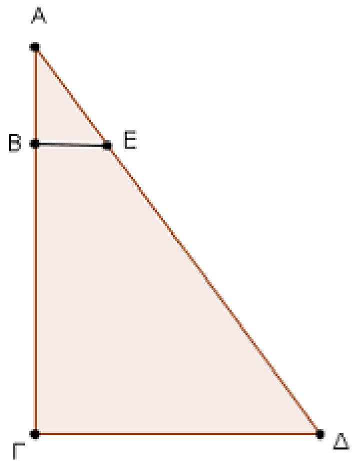
i. Εφόσον οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και τέμνονται από τις ΟΒ και ΟΔ θα ορίζουν ανάλογα τμήματα σε αυτές (Θ.Θαλή). Οπότε:

$$\frac{ΟΑ}{ΑΒ}=\frac{ΟΓ}{ΓΔ}\Leftrightarrow\frac{21}{14}=\frac{ΟΓ}{10}\Leftrightarrow 14ΟΓ=21\cdot 10\Leftrightarrow 14ΟΓ=210\Leftrightarrow ΟΓ=15.$$

ii. Εφόσον οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και τέμνονται από τις ΟΔ και ΟΖ θα ορίζουν ανάλογα τμήματα σε αυτές (Θ.Θαλή). Οπότε:

$$\frac{ΟΓ}{ΓΔ}=\frac{ΟΕ}{ΕΖ}\Leftrightarrow\frac{15}{10}=\frac{18}{ΕΖ}\Leftrightarrow 15ΕΖ=18\cdot 10\Leftrightarrow 15ΕΖ=180\Leftrightarrow ΕΖ=12.$$

Θέμα 4^{ο}:



Α. Έχουμε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΒ}{3ΑΒ}=\frac{1}{3}$ και $\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{ΑΕ}{3ΑΕ}=\frac{1}{3}$. Άρα $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ}$ οπότε από το αντίστροφο του θεωρήματος Θαλή ΒΕ//ΓΔ.

Β.i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

* $\hat{Α}$: κοινή

* $Α\hat{Β}Ε=Α\hat{Γ}Δ$ (εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΕ και ΓΔ που τέμνονται από την ΑΓ).

Επομένως είναι όμοια και $\frac{ΒΕ}{ΓΔ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΔ}=\frac{1}{3}$ δηλαδή έχουν λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$.

ii. $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΓΔ}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\text{ΒΕ}}{9}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\text{ΒΕ}=9\Leftrightarrow\text{ΒΕ}=3$**.**

Γ. $\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{\text{ΑΒ}}{12}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3\text{ΑΒ}=12\Leftrightarrow\text{ΑΒ}=4$.

Στο τρίγωνο ΑΒΕ ισχύει $\text{ΑΕ}^2=\text{ΑΒ}^2+\text{ΒΕ}^2\Leftrightarrow 5^2=4^2+3^2\Leftrightarrow$ $25=16+9\Leftrightarrow 25=25$. Επομένως το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία ΑΒΕ.