ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 39

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου

Ύλη: Τρίγωνα 30-11-14

Θέμα 1ο:

Α. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **(6 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα. **(8 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Δύο τρίγωνα που έχουν όλες τους τις γωνίες ίσες μία προς μία, είναι ίσα. **Σ Λ**

ii. Το κέντρο ενός κύκλου, το μέσο μίας χορδής και το μέσο του αντίστοιχου τόξου είναι συνευθειακά σημεία. **Σ Λ**

iii. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας είναι η διχοτόμος της γωνίας αυτής. **Σ Λ**

iv. Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει έναν άξονα συμμετρίας. **Σ Λ**

v. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta \le \gamma$, τότε $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. **Σ Λ**

vi. Οι κύκλοι (Κ,R) , (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά όταν δ=R-ρ. **Σ Λ**

(6x1=6μον.)

Θέμα 2ο:

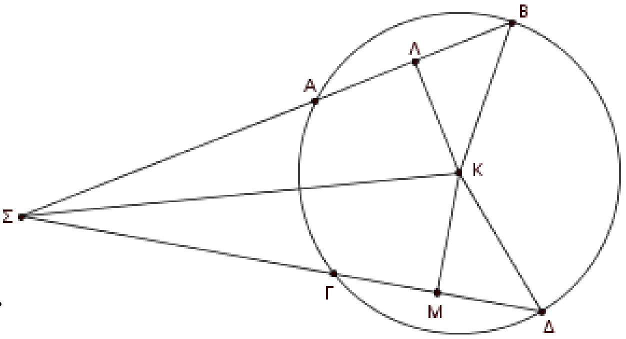
Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση τη ΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ=ΑΕ. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ να αποδείξετε ότι:

i. $A\hat{\Delta}\Gamma = A\hat{E}B$. **(5 μον.)**

ii. Τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΓΕ είναι ίσα. **(4 μον.)**

iii. Η ευθεία ΑΟ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ. **(3 μον.)**

Β. Από εξωτερικό σημείο Σ κύκλου (Κ,ρ), θεωρούμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου, για τις οποίες ισχύει ΣΒ=ΣΔ. Τα ΚΛ και ΚΜ είναι τα αποστήματα των χορδών ΑΒ και ΓΔ του κύκλου αντίστοιχα.



i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΒΣ και ΚΔΣ είναι ίσα. **(6 μον.)**
ii. Να αποδείξετε ότι ΚΛ=ΚΜ. **(4 μον.)**
iii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι ίσες. **(3 μον.)**

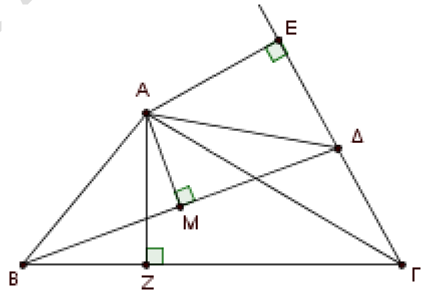
<u>Θέμα 3$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ. **(10 μον.)**

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{\text{Α}} = 90^\circ\right)$, η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
i. ΑΔ=ΔΕ. **(8 μον.)**
ii. ΑΔ<ΔΒ. **(7 μον.)**

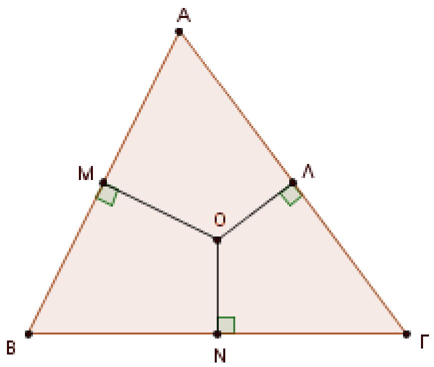
<u>Θέμα 4$^{\text{ο}}$:</u>

Α. Στο διπλανό σχήμα είναι $\text{Β}\hat{\Gamma}\text{Α} = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε}$.
Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΔ, $\text{ΑΖ} \perp \text{ΒΓ}$ και $\text{ΑΕ} \perp \text{ΓΕ}$.
Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΕΔ.



(9 μον.)

Β. Αν στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ το Ο είναι το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του, να αποδείξετε:
i. ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. **(6 μον.)**
ii. $\text{ΟΑ} > \dfrac{1}{6}\left(\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \text{ΑΓ}\right)$. **(6 μον.)**
iii. Αν ΒΓ>ΑΒ, τότε ΟΜ>ΟΝ. **(4 μον.)**



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

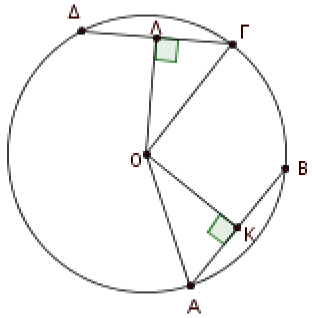
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

Θέμα 1^{o}:

Α. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν :

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία .
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία .

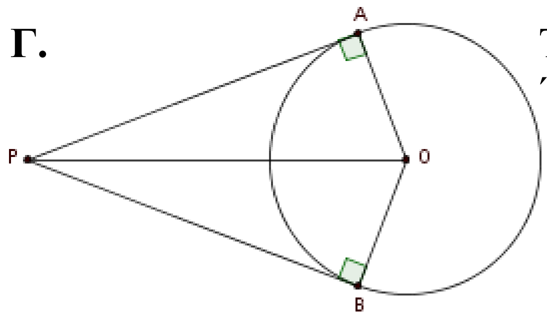
Β.



($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{\circ}$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ). Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{\circ}$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ $\Leftrightarrow \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$

Γ.

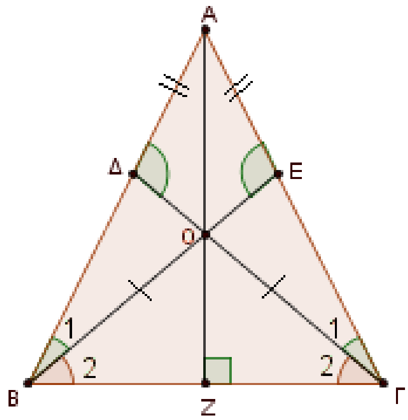


Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ είναι ορθογώνια. Έχουν την ΟΡ κοινή και ΟΑ=ΟΒ=(=ρ). Άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ=ΡΒ.

Δ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Λ **vi.** Λ

Θέμα 2ο:

Α.



Υ	ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ=ΑΕ
Σ	i. $\widehat{A\Delta\Gamma}=\widehat{AEB}$ ii. $\overset{\triangle}{OB\Delta}=\overset{\triangle}{O\Gamma E}$ iii. ΟΑ μέσο$\perp$ΒΓ

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΕΓ:

$$\left.\begin{aligned}&1.A\Delta=AE(Y)\\&2.\hat{A}:\text{κοινή}\\&3.AB=A\Gamma(Y)\end{aligned}\right\}\overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}\ \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Άρα όλα τους τα στοιχεία αντίστοιχα ίσα, οπότε $\widehat{A\Delta\Gamma}=\widehat{AEB}$.
Επίσης από την παραπάνω σύγκριση προκύπτει ότι:

$\hat{B}=\hat{\Gamma}\overset{\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1}{\Leftrightarrow}\hat{B}-\hat{B}_1=\hat{\Gamma}-\hat{\Gamma}_1\Leftrightarrow\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2$. Άρα το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές.

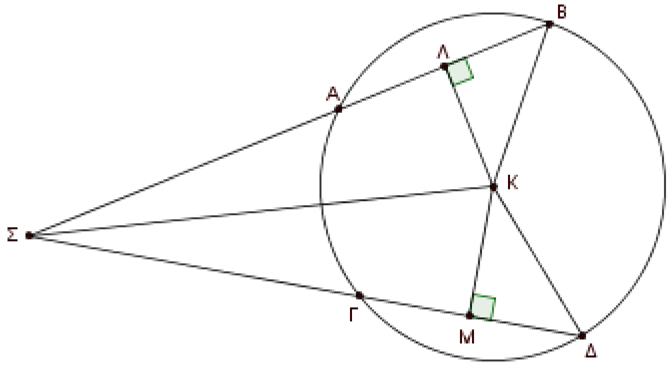
ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΒΔ, ΟΓΕ:

$$\left.\begin{aligned}&1.\Delta B=E\Gamma(\text{ως διαφορά ίσων τμημάτων})\\&2.\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1(\text{από προηγούμενη σύγκριση})\\&3.OB=O\Gamma\left(\overset{\triangle}{OB\Gamma}:\text{ισοσκελές}\right)\end{aligned}\right\}\overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Το Α ισαπέχει από τα Β και Γ εφόσον ΑΒ=ΑΓ. Άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τα Β και Γ εφόσον ΟΒ=ΟΓ. Οπότε ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή κάθε ευθεία ορίζεται μονοσήμαντα από δύο σημεία, η ΟΑ είναι η μεσοκάθετος του ΒΓ.

B.



Υ	ΣΒ=ΣΔ
Σ	i. $K\overset{\triangle}{B}\Sigma = K\overset{\triangle}{\Delta}\Sigma$ ii. ΚΛ=ΚΜ iii. ΑΒ=ΓΔ

i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΒΣ, ΚΔΣ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Sigma B = \Sigma\Delta(Y) \\ 2.\Sigma K : \text{κοινή} \\ 3.KB = K\Delta(\text{ως ακτίνες του κύκλου}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow} \text{ Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΛΚ, ΔΜΚ:

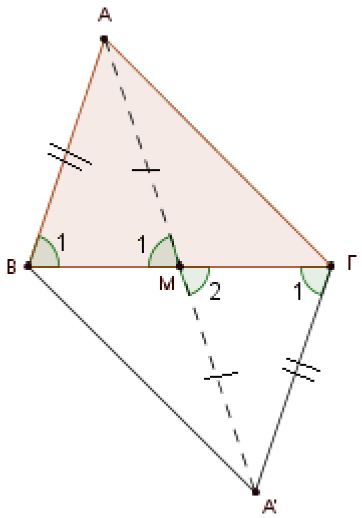
$$\left.\begin{array}{l} 1.BK = K\Delta(\text{ως ακτίνες του κύκλου}) \\ 2.\hat{B} = \hat{\Delta}(\text{από προηγούμενη σύγκριση}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα. Οπότε όλα τους τα στοιχεία θα είναι ίσα ένα προς ένα, άρα ΚΛ=ΚΜ.

iii. Τα αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΓΔ είναι ίσα εφόσον ΚΛ=ΚΜ. Οπότε και οι αντίστοιχες χορδές θα είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΓΔ.

<u>Θέμα 3^{o}:</u>

A.



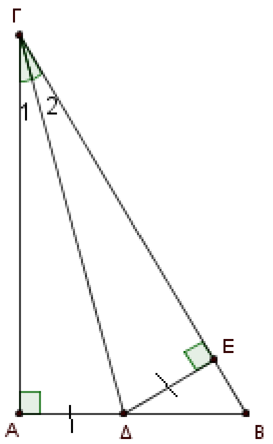
Φέρουμε τα συμμετρικά Α΄, Β, Γ των Α, Β, Γ ως προς το Μ αντίστοιχα.
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ, Α΄ΓΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AM}=\mathrm{MA'}(\mathrm{Y}) \\ 2.\mathrm{BM}=\mathrm{M\Gamma}(\mathrm{Y}) \\ 3.\hat{\mathrm{M}}_1=\hat{\mathrm{M}}_2\,(\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{ Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A'\Gamma}(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \\ 2.\mathrm{B\Gamma}:\text{κοινή} \\ 3.\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Gamma}_1(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow} \text{ Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Β.



Υ	$\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2,\ \Delta E\perp B\Gamma$
Σ	i. ΑΔ=ΔΕ ii. ΑΔ<ΔΒ

i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΕΔ:

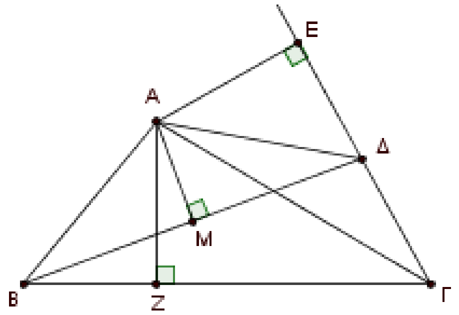
$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2(\mathrm{Y}) \\ 2.\Gamma\Delta:\text{κοινή} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε ΑΔ=ΔΕ.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΔΒ είναι η υποτείνουσα, οπότε είναι η μεγαλύτερη πλευρά άρα $\Delta E<\Delta B \overset{i.\,A\Delta=\Delta E}{\Rightarrow} A\Delta<\Delta B$.

Θέμα 4^o:

Α.



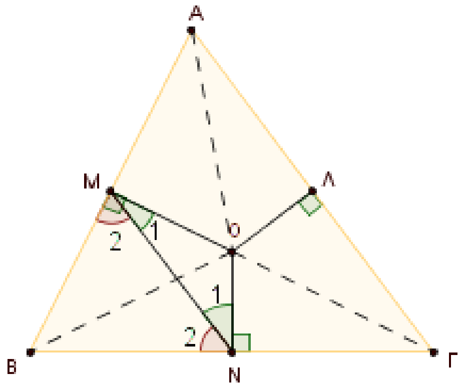
Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΕ οπότε ΑΖ=ΑΕ(1), εφόσον κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας. Επίσης , η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΒΔ άρα ΑΒ=ΑΔ(2) εφόσον κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Τότε:

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ, ΑΕΔ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}(2) \\ 2.\mathrm{AZ} = \mathrm{AE}(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, οπότε ΒΖ=ΕΔ.

Β.



i. Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ, οπότε ΟΑ=ΟΒ(1).
Το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο του ΒΓ, οπότε ΟΒ=ΟΓ(2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

ii. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΟΒ έχουμε ότι: ΑΟ>ΑΒ-ΟΒ(3).
Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΒΟΓ έχουμε ότι: ΒΟ>ΒΓ-ΟΓ(4).
Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΟΓ έχουμε ότι: ΑΟ>ΑΓ-ΟΓ(5).

Προσθέτοντας τις (3),(4),(5) κατά μέλη προκύπτει:

$$\text{AO+BO+AO>AB+B}\Gamma\text{+A}\Gamma\text{-OB-O}\Gamma\text{-O}\Gamma \overset{\text{OA=OB=O}\Gamma}{\Leftrightarrow}$$

$$3\text{OA>AB+A}\Gamma\text{+B}\Gamma\text{-3OA} \Leftrightarrow 6\text{OA>AB+B}\Gamma\text{+A}\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\text{OA} > \frac{1}{6}\left(\text{AB} + \text{B}\Gamma + \text{A}\Gamma\right).$$

iii. Φέρουμε τη ΜΝ. Τότε έχουμε:

$$\text{B}\Gamma > \text{AB} \Leftrightarrow \frac{\text{B}\Gamma}{2} > \frac{\text{AB}}{2} \Leftrightarrow \text{BN} > \text{BM} \overset{\sigma\tau o\, \text{B}\overset{\triangle}{\text{M}}\text{N}}{\Rightarrow} \hat{\text{M}}_2 > \hat{\text{N}}_2 \Rightarrow$$

$$-\hat{\text{M}}_2 < -\hat{\text{N}}_2 \Rightarrow 90^\circ - \hat{\text{M}}_2 < 90^\circ - \hat{\text{N}}_2 \Rightarrow \hat{\text{M}}_1 < \hat{\text{N}}_1 \overset{\sigma\tau o\, \text{O}\overset{\triangle}{\text{M}}\text{N}}{\Rightarrow}$$

$$\text{ON} < \text{OM}.$$