ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **38**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα , Παράλληλες ευθείες, **30-03-14**
Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια

Θέμα 1^{o}:

Α .Τι ονομάζουμε βαρύκεντρο ενός τριγώνου και ποια ιδιότητα έχει; **(6 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30°, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν η διάκεντρος των δύο κύκλων (Κ,5cm) και (Λ,3cm) έχει μήκος 2cm, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. **Σ Λ**

ii. Μία εξωτερική γωνία τριγώνου μπορεί να είναι ίση με μία εσωτερική του. **Σ Λ**

iii. Οι διαγώνιοι ενός οποιουδήποτε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του. **Σ Λ**

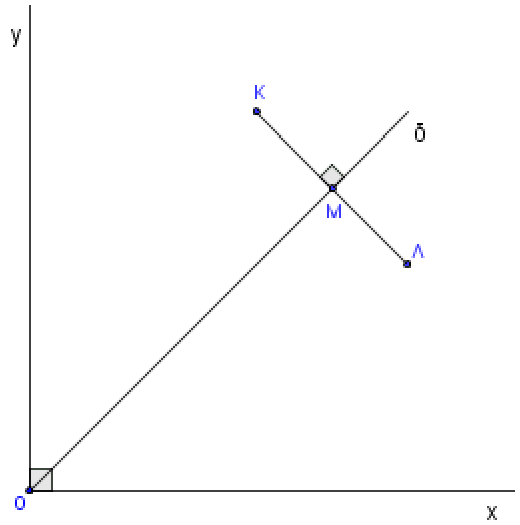
iv. Αν ένα τραπέζιο έχει τρεις πλευρές ίσες, τότε είναι ισοσκελές. **Σ Λ**

v. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) το υ_{α} και η μ_{β} τέμνονται στο βαρύκεντρο του τριγώνου. **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

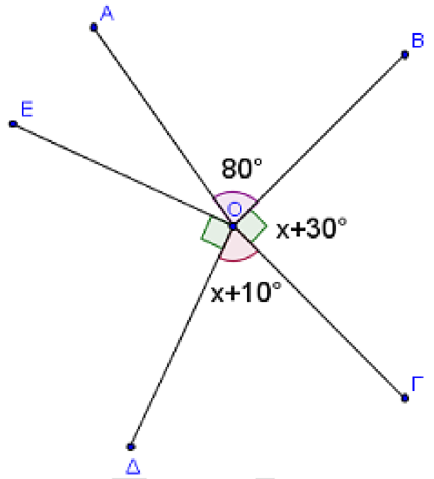
Θέμα 2^{o}:

Α. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και η Οδ η διχοτόμος της. Θεωρούμε ένα σημείο Κ στο εσωτερικό της γωνίας έτσι ώστε να μην βρίσκεται πάνω στην Οδ. Από αυτό φέρουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα ΚΜ προς την Οδ, το οποίο προεκτείνουμε κατά τμήμα ΜΛ=ΚΜ.



i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές. **(8 μον.)**
ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του Κ από την Oy είναι ίση με την απόσταση του Λ από την Ox. **(4 μον.)**

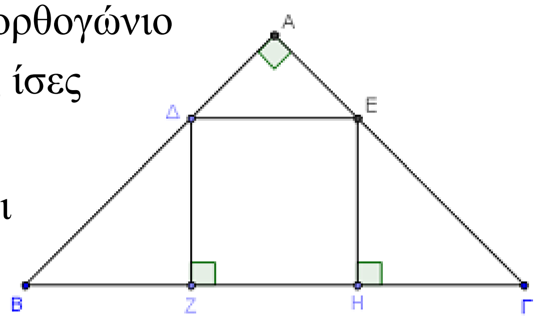
Β. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ότι: ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ.
i. Να βρείτε το x. **(8 μον.)**
ii. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΕΑ. **(5 μον.)**



<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Α. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ και ΒΔ η διχοτόμος του. Από το Δ φέρουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ε.
i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές. **(5 μον.)**
ii. Αν η παράλληλη από το Ε προς την ΑΓ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΖ είναι ρόμβος. **(4 μον.)**
iii. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΒΔ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. **(3 μον.)**

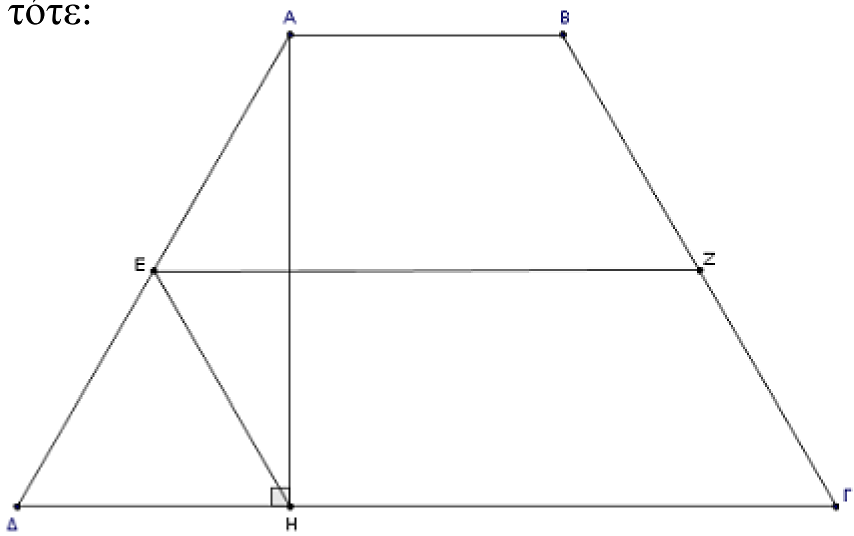
Β. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\widehat{A} = 90^\circ$ και ΑΒ=ΑΓ. Στις ίσες πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $Α Δ = \frac{ΑΒ}{3}$ και $ΑΕ = \frac{ΑΓ}{3}$. Αν τα Ζ και Η είναι τα ίχνη των κάθετων τμημάτων από τα Δ και Ε στη ΒΓ τότε:



i. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΗΖ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. **(5 μον.)**
ii. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΗΖ είναι τετράγωνο. **(3 μον.)**
iii. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΖΗ=ΗΓ. **(5 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ έτσι ώστε ΑΒ=4cm, ΑΔ=8cm και $\widehat{\Delta} = 60^\circ$. Αν ΕΖ η διάμεσος του τραπεζίου και ΑΗ το ύψος του, τότε:



i. Να υπολογίσετε τη ΔΗ. **(5 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΗ είναι ισόπλευρο. **(6 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. **(7 μον.)**

iv. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΒ είναι ορθογώνιο. **(7 μον.)**

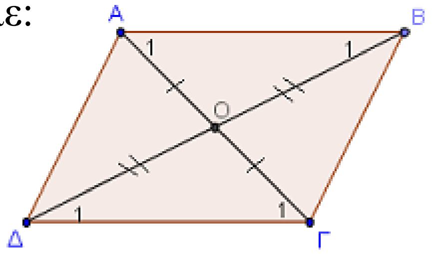
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ)

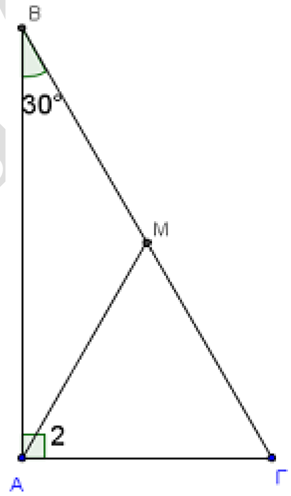
Θέμα 1^{ο}:

Α. Το βαρύκεντρο ενός τριγώνου, είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου. Έχει την ιδιότητα η απόστασή του από κάθε κορυφή να είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

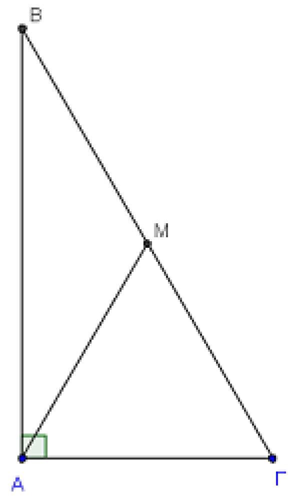
Β. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:
ΑΒ=ΓΔ, $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (εντός εναλλάξ),
$\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ (εντός εναλλάξ). Άρα τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ=ΟΓ και ΟΒ=ΟΔ.



Γ. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma\left(\widehat{A}=90^\circ\right)$ με $\widehat{B}=30^\circ$. Θα Αποδείξουμε ότι $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$. Επειδή $\widehat{B}=30^\circ$, είναι $\widehat{\Gamma}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma$. Έτσι $\widehat{A}_2=\widehat{\Gamma}=60^\circ$,
οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο.
Επομένως $A\Gamma=M\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$.



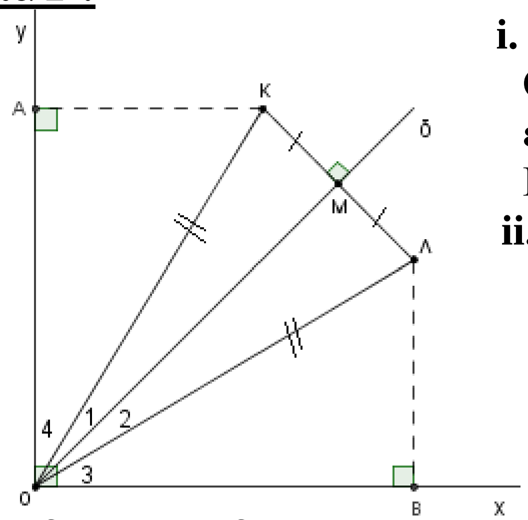
Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι $\widehat{B}=30^\circ$.
Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $AM=\frac{B\Gamma}{2}=M\Gamma=A\Gamma$ (αφού $A\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\widehat{\Gamma}=60^\circ$.
Επομένως, $\widehat{B}=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.



Δ. **i.** Σ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

Θέμα 2ο:

Α .



i. Φέρουμε τις ΟΚ,ΟΛ. Τότε στο τρίγωνο ΟΚΛ η Οδ είναι διάμεσος και ύψος εφόσον ΚΜ=ΜΛ και ΚΜ $\perp$ Οδ. Επομένως το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ii. Φέρουμε την απόσταση ΚΑ του Κ από την Οy και την απόσταση ΛΒ του Λ από την Οx. Από το (i) ερώτημα έχουμε ότι το τρίγωνο ΚΟΛ είναι ισοσκελές οπότε η Οδ θα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Όμως η Οδ είναι και διχοτόμος της ορθής γωνίας xOy, οπότε

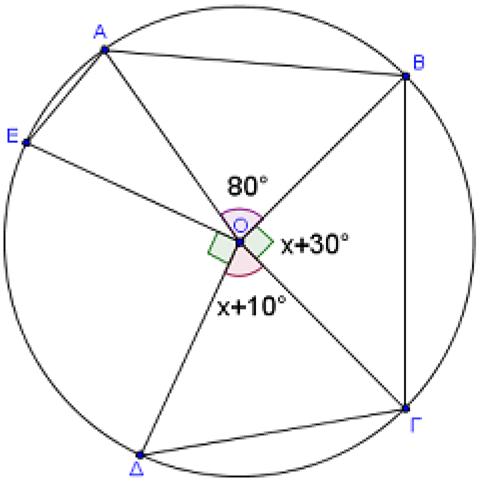
$$\delta\hat{O}y = \delta\hat{O}x \overset{\hat{O}_1=\hat{O}_2}{\Leftrightarrow} \delta\hat{O}y - \hat{O}_1 = \delta\hat{O}x - \hat{O}_2 \Leftrightarrow \hat{O}_4 = \hat{O}_3 .$$

Τότε συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΛΒΟ και ΚΑΟ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.OK = O\Lambda(i) \\ 2.\hat{O}_4 = \hat{O}_3 \end{array}\right\} \text{Οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Από την σύγκριση προκύπτει ότι ΚΑ=ΛΒ.

Β.



i. Είναι $x + 30^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ - 30^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$.

ii. Εφόσον ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ θα υπάρχει κύκλος κέντρου Ο με ακτίνα το μήκος των παραπάνω τμημάτων.

Για $x = 60^\circ$ είναι $B\hat{O}\Gamma = 90^\circ$, $\Gamma\hat{O}\Delta = 70^\circ$. Τότε:

$$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}E + E\hat{O}A = 360^\circ$$

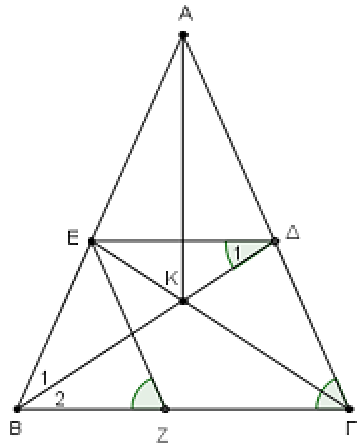
$$\Leftrightarrow 80^\circ + 90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + A\hat{O}E = 360^\circ \Leftrightarrow A\hat{O}E = 30^\circ .$$

Οπότε, $\overset{\frown}{AB} = 80^\circ, \overset{\frown}{B\Gamma} = 90^\circ, \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 70^\circ, \overset{\frown}{AE} = 90^\circ$ δηλαδή

$\overset{\frown}{AE} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta} < \overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow AE < \Gamma\Delta < AB < B\Gamma$.

Θέμα 3ο:

Α.

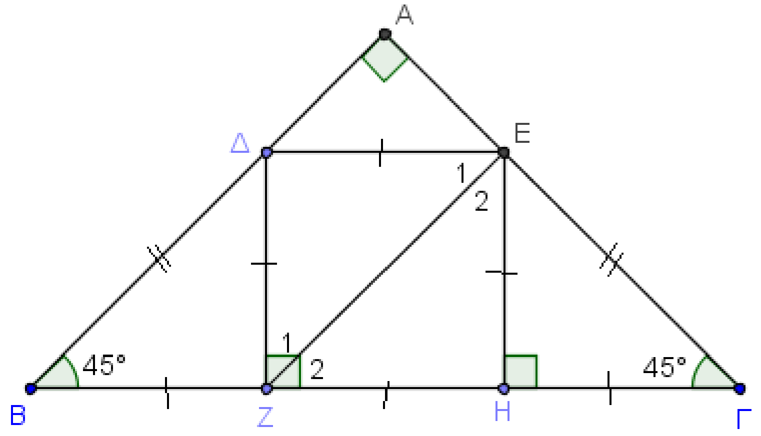


i. Είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_2$ (1) ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΕΔ, ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ. Όμως $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (2) εφόσον η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. Από (1),(2) προκύπτει ότι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{B}_1$, δηλαδή το τρίγωνο ΒΕΔ είναι ισοσκελές.

ii. Είναι ΕΔ//ΖΓ και ΕΖ//ΓΔ οπότε το ΓΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης, $\widehat{Z} = \widehat{\Gamma}$ (3), ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΓ, ΕΖ που τέμνονται από τη ΒΓ. Όμως $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (4) εφόσον το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Από (3) και (4) προκύπτει ότι $\widehat{Z} = \widehat{B}$ δηλαδή το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ισοσκελές, άρα ΕΖ=ΕΒ. Όμως ΕΒ=ΕΔ (i) οπότε ΕΖ=ΕΔ.
Επομένως το παραλληλόγραμμο ΓΔΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

iii. Από το (ii) έχουμε ότι το ΓΔΕΖ είναι ρόμβος άρα η διαγώνιος ΓΕ θα διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\Gamma}$. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ οι ΒΔ, ΓΕ είναι διχοτόμοι και τέμνονται στο Κ. Άρα το Κ είναι το έγκεντρο του τριγώνου. Οπότε και η ΑΚ θα είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου.

B.



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΖ, ΕΗΓ:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{B}=\hat{\Gamma}(\text{ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκ.τριγώνου ΑΒΓ}) \\ 2.\Delta B=E\Gamma(\text{Εφόσον } A\Delta=\dfrac{AB}{3} \text{ και } AE=\dfrac{A\Gamma}{3},\ \text{θα είναι } \Delta B=\dfrac{2AB}{3} \\ \qquad \text{και } AE=\dfrac{2A\Gamma}{3} \text{ και εφόσον } AB=A\Gamma \Rightarrow \Delta B=E\Gamma) \end{array}\right\}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε ΔΖ=ΕΗ. Επίσης, $\Delta Z \perp B\Gamma$ και $EH \perp B\Gamma$ άρα ΔΖ//ΕΗ.
Στο τετράπλευρο ΔΕΗΖ είναι ΕΗ=//ΔΖ, οπότε είναι παραλληλόγραμμο και εφόσον $\hat{Z}=90^\circ$ θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ii. Φέρουμε τη ΕΖ.
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΕ, ΖΗΕ:

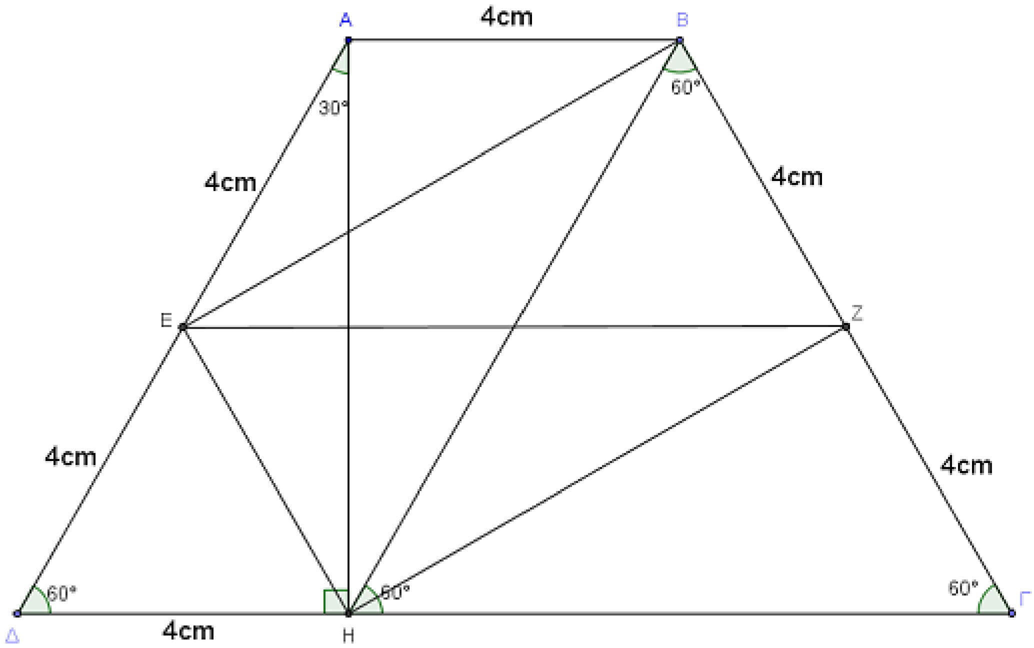
$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta Z=EH \\ 2.ZE:\text{κοινή} \end{array}\right\}\text{Τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα οπότε } \hat{Z}_1=\hat{Z}_2.$$

Όμως $\hat{Z}=90^\circ$, άρα $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=45^\circ$. Οπότε στο τρίγωνο ΕΗΖ είναι $\hat{Z}_2=45^\circ$, $\hat{H}=90^\circ$ άρα $\hat{E}_2=45^\circ$, δηλαδή είναι ισοσκελές, επομένως ΖΗ=ΕΗ. Από τη σύγκριση των τριγώνων έχουμε ότι ΖΗ=ΔΕ.
Τελικά ΔΕ=ΕΗ=ΖΗ=ΖΔ. Επομένως το ορθογώνιο ΔΕΗΖ είναι τετράγωνο.

iii. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\hat{B}=\hat{\Gamma}=45^\circ$.
Στο τρίγωνο ΔΒΖ είναι $\hat{B}=45^\circ$, $\hat{Z}=90^\circ$ άρα $\hat{\Delta}=45^\circ$, δηλαδή κι αυτό είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα ΒΖ=ΔΖ=ΖΗ.
Ομοίως στο τρίγωνο ΕΗΓ προκύπτει ότι ΓΗ=ΕΗ=ΖΗ.
Τελικά, **ΒΖ=ΖΗ=ΗΓ**.

Θέμα 4ο:

Α.



i. Στο τρίγωνο ΑΔΗ ($\widehat{H}=90^\circ$), είναι $\widehat{\Delta}=60^\circ$ άρα $\widehat{A}=30^\circ$. Τότε θα είναι $\Delta H=\frac{A\Delta}{2}=\frac{8}{2}=4cm$.

ii. Στο ΑΒΗΔ είναι ΑΒ=//ΔΗ άρα είναι παραλληλόγραμμο. Τότε:
Στο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $\widehat{H}=\widehat{\Delta}=60^\circ$ ως εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ΑΔ, ΒΗ που τέμνονται από τη ΓΔ. Επίσης, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Delta}=60^\circ$. Τότε στο τρίγωνο ΒΗΓ είναι $\widehat{H}=60^\circ, \widehat{\Gamma}=60^\circ$ και $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}+\widehat{H}=180^\circ$ $\Leftrightarrow \widehat{B}=60^\circ$. Επομένως το τρίγωνο ΒΗΓ είναι ισόπλευρο.

iii. Είναι ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου άρα ΕΖ//ΓΗ. Επίσης, στο τρίγωνο ΑΗΔ($\widehat{H}=90^\circ$) η ΕΗ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα, οπότε $EH=\frac{A\Delta}{2}\Rightarrow EH=E\Delta=4cm$. Τότε το τρίγωνο ΕΗΔ είναι ισόπλευρο, άρα $E\widehat{H}\Delta=60^\circ=\widehat{\Gamma}$. Και εφόσον οι δύο αυτές γωνίες είναι εντός, εκτός κι επί τα αυτά μέρη των ΖΓ, ΕΗ που τέμνονται από την ΗΓ, θα είναι ΕΗ//ΖΓ. Έχουμε ότι ΖΕ//ΗΓ και ΖΓ//ΕΗ δηλαδή το τετράπλευρο ΕΗΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

iv. Εφόσον η ΕΖ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τραπέζιο είναι ΑΕ=ΔΕ=ΒΖ=ΖΓ=4cm. Όμως ΕΗ=4cm(iii), άρα ΒΖ=ΕΗ. Επίσης, ΕΗ//ΒΖ εφόσον το ΕΖΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, άρα το ΕΗΖΒ είναι παραλληλόγραμμο.

Έχουμε ότι το τρίγωνο ΒΗΓ είναι ισόπλευρο άρα ΒΗ=ΗΓ(1) και ότι το ΕΖΓΗ είναι παραλληλόγραμμο άρα ΕΖ=ΗΓ(2). Από (1), (2) προκύπτει ότι ΒΗ=ΕΖ δηλαδή οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.