ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 36

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα , Παράλληλες ευθείες **02-02-14**

Θέμα 1^{ο}:

Α .Ποια είναι τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου και πως συμβολίζονται ;(αναφορικά) **(6 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές , τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες . **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές . **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το περίκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων. **Σ Λ**

ii. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές . **Σ Λ**

iii. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα εμβαδά , τότε είναι ίσα . **Σ Λ**

iv. Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία είναι μεταξύ τους κάθετες . **Σ Λ**

v. Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους . **Σ Λ**

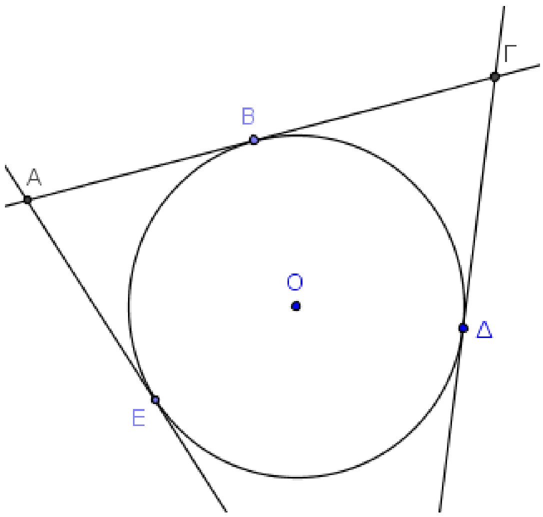
(5x1=5μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Στο διπλανό σχήμα οι ΑΓ , ΑΕ και ΓΔ είναι εφαπτόμενες του κύκλου με κέντρο Ο.

i. Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας . **(5 μον.)**

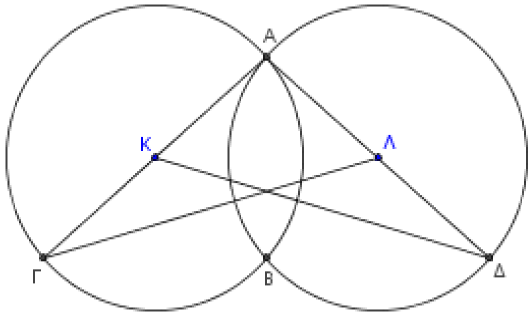
ii. Να αποδείξετε ότι ΑΓ=ΑΕ+ΓΔ. **(7 μον.)**



Β. Δύο κύκλοι (Κ,ρ) και (Λ ,ρ) τέμνονται στα σημεία Α και Β .Αν ΑΓ και ΑΔ οι διάμετροι των κύκλων με κέντρα Κ και Λ αντίστοιχα , τότε :

i. Να αποδείξετε ότι ΓΛ=ΚΔ. **(8 μον.)**

ii.Αν Μ το σημείο τομής των ΓΛ και ΚΔ, να αποδείξετε ότι τα Α , Μ ,Β είναι συνευθειακά . **(5 μον.)**

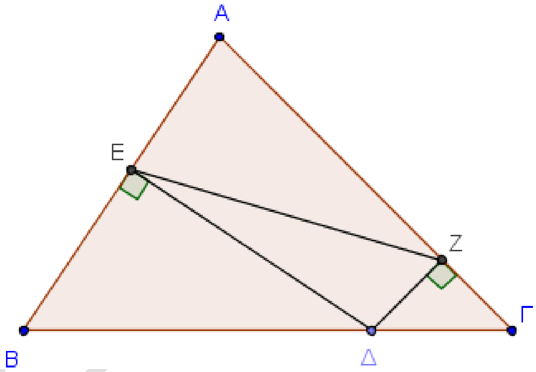


Θέμα 3^{o}:

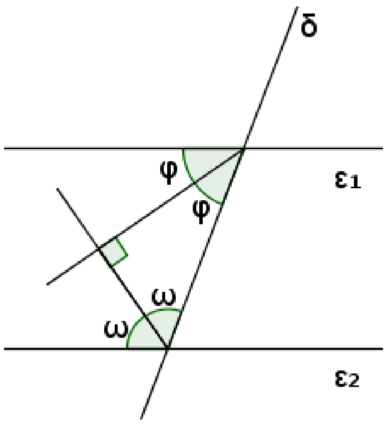
Α. Αν Δ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ε ,Ζ οι προβολές του στις ΑΒ,ΑΓ αντίστοιχα , να αποδείξετε ότι :

i. ΕΖ<ΒΓ. **(7 μον.)**

ii.ΒΕ+ΕΖ+ΖΓ<2ΒΓ . **(6 μον.)**



Β. Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται από μία τρίτη ευθεία δ και σχηματίζονται οκτώ γωνίες . Αν οι διχοτόμοι των δύο εντός κι επί τ΄αυτά γωνιών είναι κάθετες , να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες . **(12 μον.)**



Θέμα 4^{o}:

Α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΜ , ΓΝ οι διάμεσοί του .Προεκτείνουμε τις διαμέσους έτσι ώστε ΒΜ=ΜΔ και ΓΝ=ΝΕ . Να αποδείξετε ότι :

i. ΑΔ//ΒΓ. **(4 μον.)**

ii. ΕΑ//ΒΓ. **(4 μον.)**

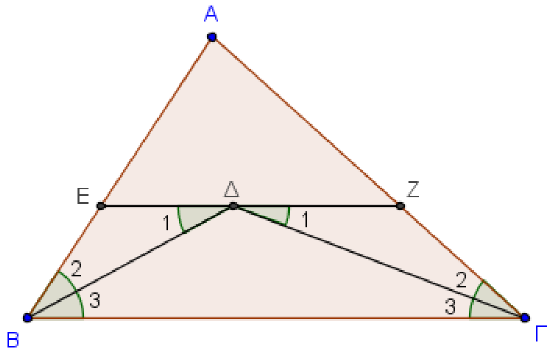
iii.Τα σημεία Ε,Α,Δ είναι συνευθειακά. **(5 μον.)**

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Β. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B},\hat{\Gamma}$. Η παράλληλη από το Δ προς τη ΒΓ τέμνει τις άλλες πλευρές στα Ε και Ζ .Να αποδείξετε ότι :

i. ΖΕ=ΕΒ+ΖΓ **(6 μον.)**

ii. $B\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\hat{A}$ **(6 μον.)**



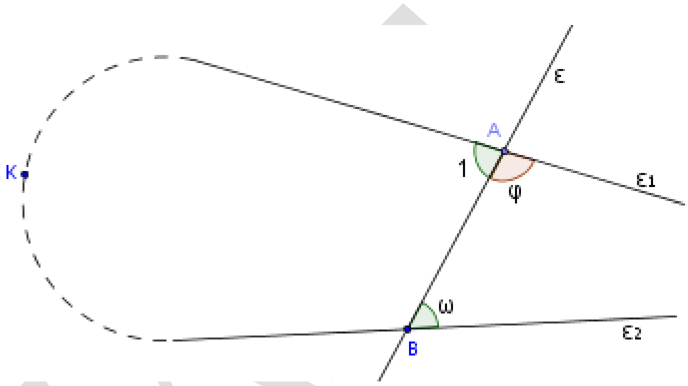
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

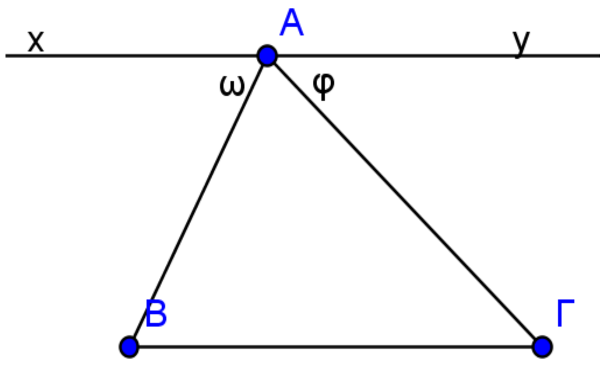
Θέμα 1ο:

Α. Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι η διάμεσος , η διχοτόμος και το ύψος .Η διάμεσος από την κορυφή Α , συμβολίζεται με μ_α, η διχοτόμος δ_α και το ύψος υ_α.

Β. Έστω ότι ε τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στα Α και Β αντίστοιχα και ότι $\varphi+\omega\neq 2L$.Τότε οι ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες αφού $\varphi+\omega\neq 2L$.Έστω ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο Κ , προς το μέρος της τέμνουσας , που δεν περιέχει τις γωνίες ω και φ .Τότε , όμως η εξωτερική ω του τριγώνου ΑΚΒ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{A}_1$, δηλαδή $\omega>\hat{A}_1=2L-\varphi$ ή $\omega+\varphi>2L$, που είναι άτοπο. Άρα οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ .



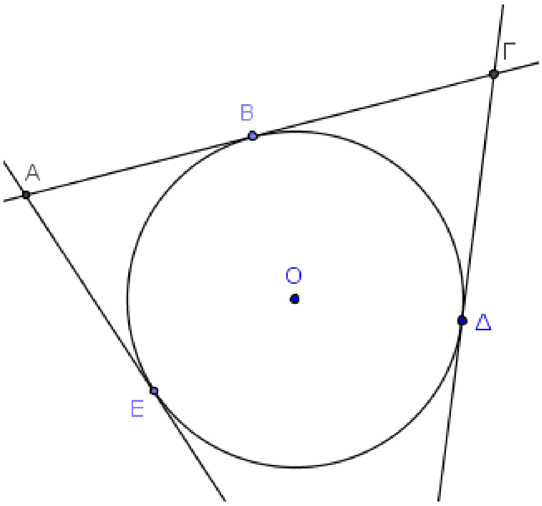
Γ. Από μία κορυφή , π.χ την Α , φέρουμε xy//ΒΓ .Τότε ω=$\hat{B}$(1) και φ=$\hat{\Gamma}$(2) , ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα . Αλλά $\omega+\hat{A}+\varphi=2L$ (3). Από τις (1) , (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2L$.



Δ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Λ **v.** Σ

Θέμα 2ο:

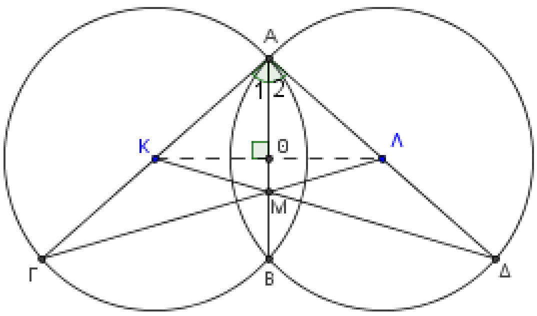
Α .



i. Τα ΑΒ , ΑΕ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου , οπότε ΑΒ=ΑΕ. Ομοίως προκύπτει ότι ΒΓ=ΓΔ.

ii. Είναι $A\Gamma = AB + B\Gamma \underset{B\Gamma=\Gamma\Delta}{\overset{AB=AE}{=}} AE + \Gamma\Delta$.

Β.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΑΛ και ΔΑΚ :

$$\left.\begin{array}{l} 1.A\Gamma = A\Delta(=2\rho) \\ 2.A\Lambda = AK(=\rho) \\ 3.\hat{A}: \text{κοινή} \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Leftrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα , οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα ενός προς ένα .Άρα ΓΛ=ΚΔ .

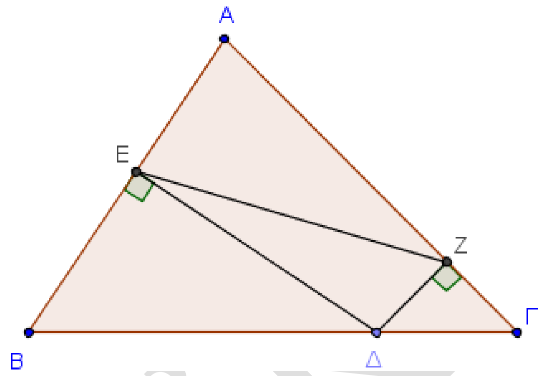
ii. Εφόσον οι δύο κύκλοι είναι ίσοι και τέμνονται στα Α και Β , τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΚΛ .
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΜ , ΑΛΜ:

$$\left.\begin{array}{l} 1. AK = A\Lambda (=\rho) \\ 2. AM : \text{κοινή} \\ 3. \hat{A}_1 = \hat{A}_2 (\text{Στο ισοσκελές } \overset{\Delta}{AK\Lambda} \text{ το ύψος } A\Theta \text{ είναι και διχοτόμος}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Leftrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα .Οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα , ένα προς ένα .Άρα ΚΜ=ΜΛ .Εφόσον ΚΜ=ΜΛ , το Μ ισαπέχει από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ , άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του. Μεσοκάθετος του ΚΛ είναι το ΑΒ ,Οπότε Α,Μ,Β είναι συνευθειακα σημεία .

Θέμα 3ο:

Α.

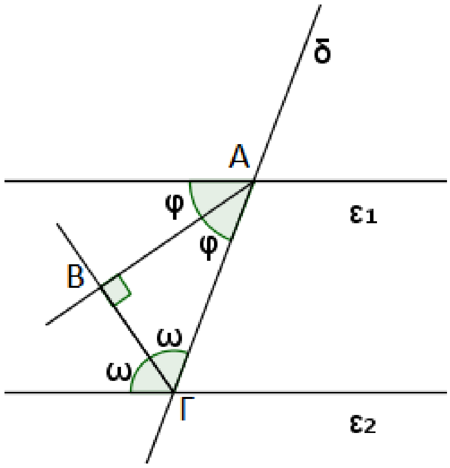


i. Το Ε είναι η προβολή του Δ πάνω στο ΑΒ άρα ΔΕ<ΔΒ (1)
Το Ζ είναι η προβολή του Δ πάνω στο ΑΓ άρα ΔΖ<ΔΓ (2)
Στο τρίγωνο ΔΕΖ από τριγωνική ανισότητα έχουμε :

$$EZ < \Delta E + \Delta Z \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Rightarrow}} EZ < \Delta B + \Delta \Gamma \Rightarrow EZ < B\Gamma .$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΒΔ είναι υποτείνουσα , οπότε ΒΕ<ΒΔ (1)
Ομοίως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΖΓ η ΔΓ είναι υποτείνουσα , οπότε ΖΓ<ΔΓ (2)
Επίσης , από το (i) ερώτημα έχουμε ότι ΕΖ<ΒΓ (3)
Προσθέτοντας τις (1) , (2) , (3) κατά μέλη προκύπτει ότι :
ΒΕ+ΕΖ+ ΖΓ<ΒΔ+ΒΓ+ΔΓ=ΒΓ+ΒΓ=2ΒΓ

Β.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι

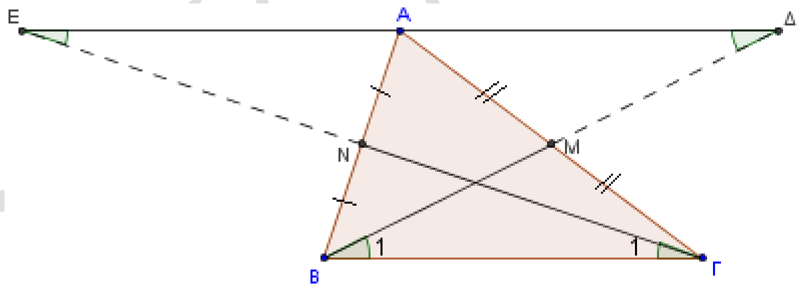
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2L \Rightarrow \hat{\varphi}+1L+\hat{\omega}=2L \Rightarrow \hat{\varphi}+\hat{\omega}=1L$$

Είναι $\left.\begin{array}{l}\hat{\varphi}+\hat{\omega}=1L\\ \hat{\varphi}+\hat{\omega}=1L\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} 2\hat{\varphi}+2\hat{\omega}=2L$

Επομένως οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σχηματίζουν τις εντός κι επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές , άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Θέμα 4^{ο}:

Α.



i. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΒΜΓ :

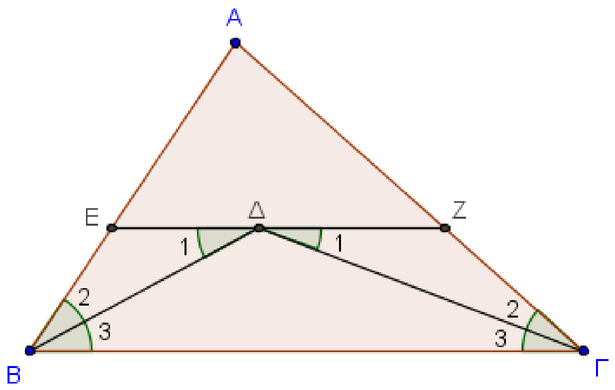
$$\left.\begin{array}{l}1.AM=M\Gamma(BM:\text{διάμεσος})\\ 2.BM=M\Delta(\Upsilon)\\ 3.\hat{AM\Delta}=\hat{BM\Gamma}(\text{ως κατακορυφήν}\end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Leftrightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι : $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}$.
Οι γωνίες B_1,Δ είναι εντός κι εναλλάξ των ΑΔ , ΒΓ που τέμνονται από τη ΒΔ και εφόσον είναι ίσες προκύπτει ότι ΑΔ//ΒΓ.

ii. Ομοίως συγκρίνοντας τα τρίγωνα ΕΝΑ και ΒΝΓ προκύπτει ότι $\hat{E} = \hat{\Gamma}_1$.Οι γωνίες Ε ,Γ_1 είναι εντός κι εναλλάξ των ΕΑ και ΒΓ που τέμνονται από την ΕΓ , και εφόσον είναι ίσες έπεται ότι ΕΑ//ΒΓ.

iii. Από το (i) και το (ii) έχουμε ότι ΑΔ//ΒΓ και ΕΑ//ΒΓ , δηλαδή δύο παράλληλες προς τη ΒΓ που περνάνε από το Α .Αυτό από το αίτημα παραλληλίας είναι άτοπο .Οπότε οι παράλληλες είναι μία και όχι δύο .Άρα τα σημεία Ε,Α,Δ είναι συνευθειακά .

Β.



i. Είναι $\hat{B}_2 = \hat{B}_3$ (1) εφόσον ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β .

Επίσης $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_3$ (2) ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΕΖ και ΒΓ που τέμνονται από την ΒΔ .

Από (1) , (2) προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_1$ δηλαδή το ΒΕΔ τρίγωνο είναι ισοσκελές , άρα ΕΒ=ΕΔ (3)
Ομοίως προκύπτει ότι το ΔΖΓ τρίγωνο είναι ισοσκελές , άρα ΔΖ=ΖΓ (4)

Έχουμε : $ZE = E\Delta + \Delta Z \underset{(4)}{\overset{(3)}{=}} EB + Z\Gamma$

ii. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^\circ \overset{(:2)}{\Leftrightarrow} \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=90^\circ$ (1)

Όμως στο τρίγωνο ΔΒΓ είναι $\hat{B}_3+B\hat{\Delta}\Gamma+\hat{\Gamma}_3=180^\circ \Leftrightarrow$

$\frac{\hat{B}}{2}+B\hat{\Delta}\Gamma+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=180^\circ \Leftrightarrow \frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=180^\circ-B\hat{\Delta}\Gamma$ (2)

Η (1)$\overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\hat{A}}{2}+180^\circ-B\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ \Leftrightarrow B\hat{\Delta}\Gamma=\frac{\hat{A}}{2}+90^\circ$.