ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 33

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου

Ύλη: Τρίγωνα 10-11-13

Θέμα 1ο:

Α. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων. **(7 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του , είναι ύψος και διχοτόμος . **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα , κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου . **(7 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες είναι ισόπλευρο. **Σ Λ**

ii. Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντα οξείες . **Σ Λ**

iii. Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι το ύψος , η διάμεσος και η διχοτόμος . **Σ Λ**

iv. Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του είναι τμήμα ίσο με αυτό. **Σ Λ**

v. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες είναι κύκλος με κέντρο την κορυφή της γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες . **Σ Λ**

(5x1=5μον.)

Θέμα 2ο:

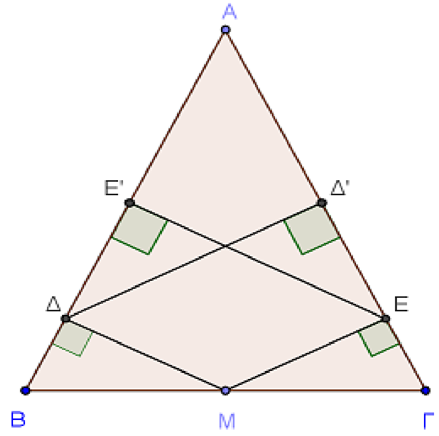
Α. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο , μια ακτίνα του ΟΑ και ένα τυχαίο σημείο Κ αυτής . Με κέντρο το Κ γράφουμε κύκλο , ο οποίος τέμνει τον πρώτο κύκλο στα σημεία Β και Γ.

i . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΚΒ και ΟΚΓ είναι ίσα. **(7 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι η ΟΑ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ. **(6 μον.)**

Β. Να δείξετε ότι το συμμετρικό τριγώνου ΑΒΓ ως προς την κορυφή Α είναι το τρίγωνο ΑΒ΄Γ΄ που ορίζεται από τα συμμετρικά Β΄ και Γ΄ των Β και Γ αντίστοιχα ως προς το Α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα . **(12 μον.)**

Θέμα 3ο:



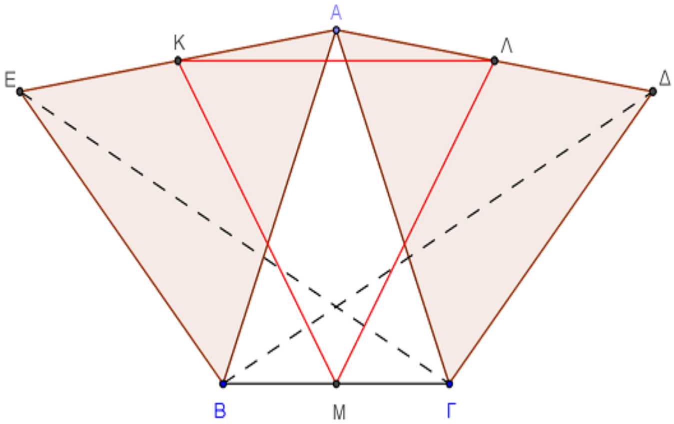
Α. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ), Μ το μέσο της ΒΓ, $ΜΔ \perp ΑΒ$ και $ΜΕ \perp ΑΓ$. Αν $ΔΔ' \perp ΑΓ$ και $ΕΕ' \perp ΑΒ$, να αποδείξετε ότι $ΔΔ' = ΕΕ'$. **(12 μον.)**

Β. Εξωτερικά ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ. Να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα. **(4 μον.)**

ii. ΒΔ=ΕΓ. **(4 μον.)**

iii. Αν Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΕΑ, ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, τότε το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές. **(5 μον.)**



Θέμα 4ο:

Α. Να κυκλώσετε το **(Σ)** ή το **(Λ)** στις προτάσεις :

1. $(\alpha-\beta)^2 = (\beta-\alpha)^2$ **Σ Λ**
2. $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2 + 2\alpha\beta$ **Σ Λ**
3. Αν α+β+γ=0 τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ **Σ Λ**
4. $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$ **Σ Λ**
5. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^3 < \beta^3$ **Σ Λ**
6. $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$ **Σ Λ**
7. $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\delta}{\gamma}$ **Σ Λ**
8. Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ τότε α>β. **Σ Λ**
9. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ ή $\gamma \neq 0$ **Σ Λ**
10. $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} > \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ **Σ Λ**

(5 μον.)

Β. Δίνεται η παράσταση $A(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}-\dfrac{x+2}{x^2+x-2}$.

1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση . **(3 μον.)**

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση . **(3 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$K=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}-\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}+\frac{2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}\ ,\ \alpha\neq\beta\ ,\ \alpha\neq-\beta$$

(5 μον.)

Δ. 1. Αν $0<\alpha\leq 2$ και $1\leq\beta<3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της παράστασης $3\alpha-\beta+2$. **(3 μον.)**

2. Αν $\beta>\alpha>0$ να δείξετε ότι :

α) $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}$ **β)** $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\alpha+\beta}{1+\beta}$ **(3 μον.)**

3. Αν α, β>0 να δείξετε ότι : $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$. **(3 μον.)**

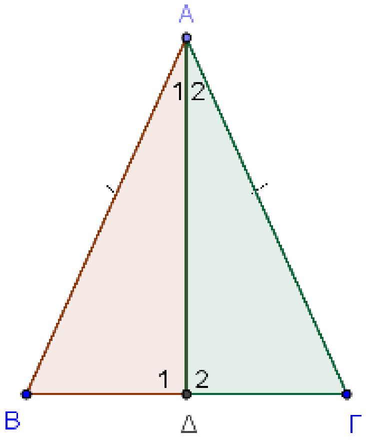
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

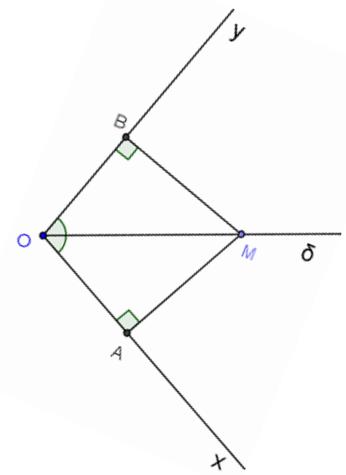
Θέμα 1ο:

Α.Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα , όταν έχουν :

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία .
- Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία .



Β. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός τους . Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ , άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα , οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος .

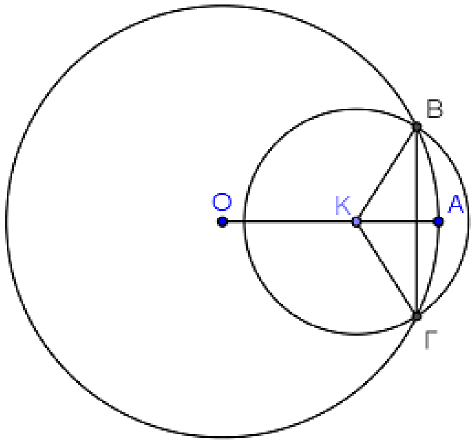


Γ. Έστω μία γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ .Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$.Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$.
Επομένως , ΜΑ=ΜΒ .
Αντίστροφα . Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας .Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι ΜΑ=ΜΒ .Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα , αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$,ΟΜ κοινή και ΜΑ=ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$,οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ .

Δ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Λ

Θέμα 2^{o}:

Α .



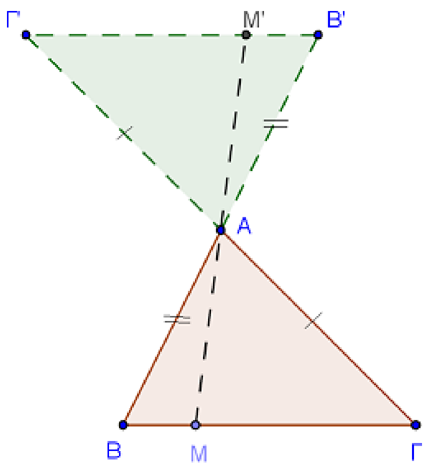
Υ	(σχήμα)
Σ	i. $\overset{\Delta}{OKB} = \overset{\Delta}{OK\Gamma}$ ii. ΟΑμέσο$\perp$ΒΓ

i. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{OKB}, \overset{\Delta}{OK\Gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.OB = O\Gamma (\text{ως ακτίνες του κύκλου } (O,OA)) \\ 2.OK : \text{κοινή} \\ 3.KB = K\Gamma (\text{ως ακτίνες του κύκλου } (K,KB)) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow} \text{ Τα τρίγωνα είναι ίσα}$$

ii Επίσης ΟΒ=ΟΓ άρα το Ο ισαπέχει από τα Β και Γ .
Επίσης ΚΒ=ΚΓ άρα το Κ ισαπέχει από τα Β και Γ .
Οπότε το Ο και το Κ ανήκουν στην μεσοκάθετο του ΒΓ.
Και εφόσον δύο σημεία ορίζουν μία ευθεία η ΟΚ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ .Ο , Κ , Α συνευθειακά , άρα η ΟΑ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ .

Β.



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ .Φέρουμε τα συμμετρικά των Α , Β , Γ ως προς το Α που είναι τα Α , Β΄ Γ΄αντίστοιχα .
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ , ΑΒ΄Γ΄ :

$$\left.\begin{array}{l} 1.AB = AB'(Y) \\ 2.A\Gamma = A\Gamma'(Y) \\ 3.B\hat{A}\Gamma = B'\hat{A}\Gamma'(\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Leftrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα .Έστω ένα τυχαίο σημείο Μ του τριγώνου ΑΒΓ. Θα δείξουμε ότι το Μ΄ είναι το συμμετρικό του , δηλαδή ότι ΑΜ=ΑΜ΄

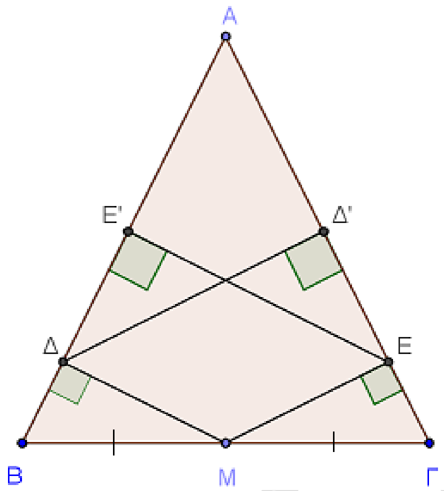
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ , ΑΒ΄Μ΄:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{B}=\hat{B}'(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \\ 2.M\hat{A}B=M'\hat{A}B'(\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.BA=B'A(Y) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Leftrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα .Οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα δηλαδή ΑΜ=ΑΜ΄

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.



$$\begin{array}{c|lll} Y & AB=A\Gamma & M\Delta\perp AB & A\Delta'\perp A\Gamma \\ & BM=M\Gamma & ME\perp A\Gamma & EE'\perp AB \\ \hline \Sigma & \Delta\Delta'=EE' & & \end{array}$$

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta M$, ΓEM :

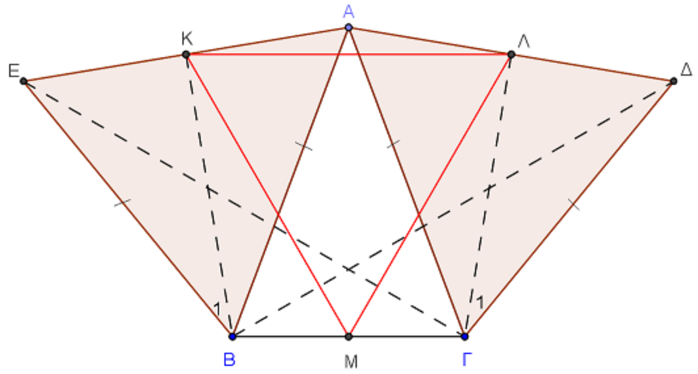
$$\left.\begin{array}{l} 1.BM=M\Gamma(Y) \\ 2.\hat{B}=\hat{\Gamma}(\text{ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια πλευρά και μία οξεία τους γωνία ίσες μία προς μία άρα είναι ίσα . Οπότε , όλα τους τα αντίστοιχα στοιχεία ίσα , δηλαδή ΔΒ=ΕΓ(1) . Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔ΄Δ , ΑΕ΄Ε:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{A}:\text{κοινή} \\ 2.A\Delta=\Delta E\left(\begin{array}{l}\text{ως διαφορές των ίσων τμημάτων} \\ AB=A\Gamma\ ,\ \Delta B=E\Gamma\end{array}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία τους γωνία αντίστοιχα ίσες , μία προς μία , άρα είναι ίσα .
Οπότε θα είναι ΔΔ΄=ΕΕ΄.

B.



Υ	$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$: ισοσκελές $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$, $\overset{\Delta}{EAB}$: ισόπλευρα
Σ	**i.** $\overset{\Delta}{ABE} = \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ **ii.** $B\Delta = E\Gamma$ **iii.** $\overset{\Delta}{K\Lambda M}$ **:** ισοσκελές

i. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{ABE}, \overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.AE = A\Delta(Y) \\ 2.AB = A\Gamma(Y) \\ 3.EB = \Delta\Gamma(Y) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Pi-\Pi}{\Rightarrow}$$ τα τρίγωνα είναι ίσα .

ii. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{EB\Gamma}, \overset{\Delta}{\Delta\Gamma B}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.EB = \Gamma\Delta(Y) \\ 2.B\Gamma : \text{κοινή} \\ 3.E\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}B (\text{ως αθροίσματα ίσων γωνίων } E\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}B \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα , άρα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα , οπότε ΒΔ=ΕΓ .

iii. Φέρουμε τις ΚΒ , ΛΓ .

Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{KEB}$, $\overset{\Delta}{\Lambda\Delta\Gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.KE = \Lambda\Delta (\text{ως μισά ίσων πλευρών}) \\ 2.EB = \Gamma\Delta(Y) \\ 3.\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 (\text{ως μισά ίσων γωνιών } \hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ και στα ισόπλευρα} \\ \qquad \overset{\Delta}{BEA}, \overset{\Delta}{\Gamma A\Delta} \text{ οι διάμεσοι BK , ΛΓ θα είναι και διχοτόμοι}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα , οπότε ΚΒ=ΛΓ(1)

Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{KBM}, \overset{\Delta}{\Lambda\Gamma M}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.KB = \Lambda\Gamma((1)) \\ 2.BM = M\Gamma(Y) \\ 3.K\hat{B}M = \Lambda\hat{\Gamma}M(\text{ως αθροίσματα ίσων γωνιών} \\ \qquad K\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma = \Lambda\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}B) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Rightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα , άρα ΚΜ=ΛΜ , οπότε το ΚΛΜ είναι ισοσκελές .

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. 1Σ , 2Σ , 3Σ , 4Λ , 5Σ , 6Λ , 7Λ , 8Λ , 9Σ , 10Λ

Β. **1.** Η παράσταση ορίζεται όταν δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές .
Είναι :

- $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$
- $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2$

Η παράσταση επομένως ορίζεται για $x \neq -1$, $x \neq -2$ και $x \neq 1$

2. Η παράσταση γράφεται :

$$A(x) = \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Γ. Έχουμε :

$$K = \frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)+2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha^3-\beta^3)-(\alpha^3+\beta^3)+2\beta^3+\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)} = \frac{\alpha^3-\beta^3-\alpha^3-\beta^3+2\beta^3+\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} =$$

$$= \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} = 1.$$

Δ.1. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} 0<\alpha\le 2 \\ 1\le\beta<3 \end{matrix}\right| \underset{\cdot(-1)}{\overset{\cdot 3}{\Rightarrow}} \left.\begin{matrix} 0<3\alpha\le 6 \\ -1\ge-\beta>-3 \end{matrix}\right| \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0<3\alpha\le 6 \\ -3<-\beta\le -1 \end{matrix}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$-3<3\alpha-\beta\le 5 \overset{(+2)}{\Rightarrow} -1<3\alpha-\beta+2\le 7$$

2. α) Θ.δ.ο $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta} \overset{\cdot(1+\alpha)(1+\beta)>0}{\Leftrightarrow} \alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$, που ισχύει απ' την υπόθεση.

β) Έχουμε απ' το α)ερώτημα ότι $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}$ οπότε :

$\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}<\dfrac{\alpha+\beta}{1+\beta}$ άρα $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}<\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

3. Είναι : $\dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}=\dfrac{\alpha}{1+\alpha+\beta}+\dfrac{\beta}{1+\alpha+\beta}<\dfrac{\alpha}{1+\alpha}+\dfrac{\beta}{1+\beta}$ γιατί

$1+\alpha+\beta>1+\alpha$ και $1+\alpha+\beta>1+\beta$.
(΄Οσο μεγαλύτερος παρονομαστής τόσο μικρότερο κλάσμα).