ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 33

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου

Ύλη: Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα , Τρίγωνα, Παράλληλες ευθείες , Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια 10-03-13

<u>Θέμα 1^ο:</u>

Α. Να διατυπώσετε τον ορισμό , τις ιδιότητες και τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο . **(9 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέραμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας . **(9 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Οι διχοτόμοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διχοτόμου . **Σ Λ**

ii. Οι γωνίες της βάσης του ισοσκελούς είναι πάντα οξείες . **Σ Λ**

iii. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία αποκλείεται να είναι συμπληρωματικές . **Σ Λ**

iv. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού εξαγώνου είναι 720° . **Σ Λ**

v. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη εσωτερική . **Σ Λ**

vi. Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει $\hat{A}=119^\circ$, $\hat{B}=62^\circ$, $\hat{\Delta}=62^\circ$, τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο. **Σ Λ**

vii. Σ΄ένα τετράπλευρο μπορεί οι διαγώνιές του να είναι κάθετες αλλά αυτό να μην είναι ρόμβος . **Σ Λ**

(7x1=7μον.)

<u>Θέμα 2^ο:</u>

Α. Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ , να αποδείξετε ότι : ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΔΓ. **(5 μον.)**

Β. Σε σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΑΔ=ΔΕ .Στη συνέχεια φέρνουμε το ύψος ΑΗ και στην προέκτασή του παίρνουμε τμήμα ΗΖ=ΗΑ. Να αποδείξετε ότι :

i. $\hat{A\Gamma B} = \hat{B\Gamma Z}$. **(7 μον.)**

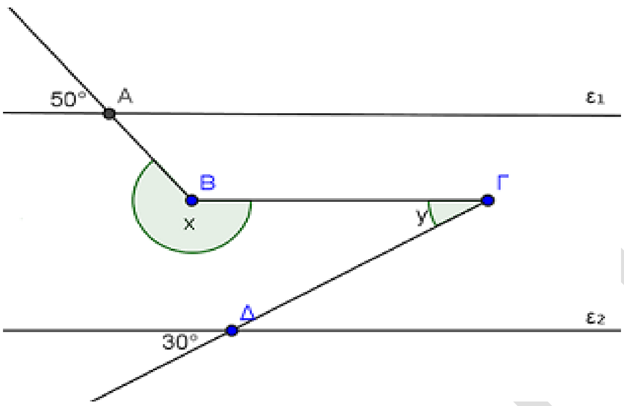
ii. Τα τρίγωνα ΒΔΕ και ΑΔΓ είναι ίσα . **(7 μον.)**

iii. Αν Ο είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΖ , τότε το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές . **(6 μον.)**

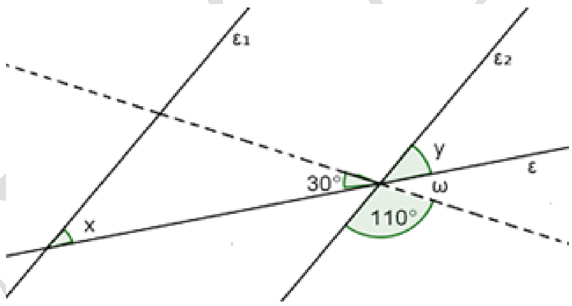
<u>Θέμα 3^{o}:</u>

Α. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{x}$ και $\hat{y}$ των παρακάτω σχημάτων , αν $\varepsilon_1 // B\Gamma // \varepsilon_2$ και $\varepsilon_3 // \varepsilon_4$.

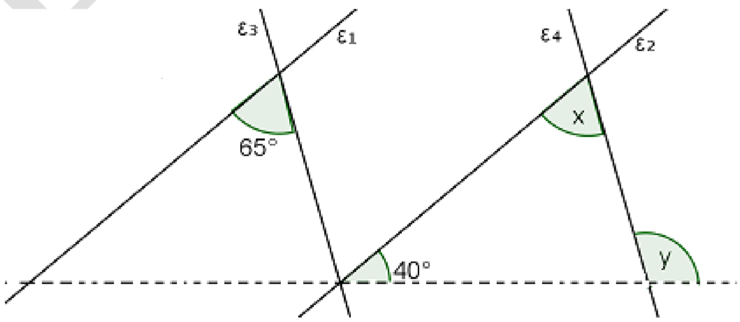
i.



ii.



iii.



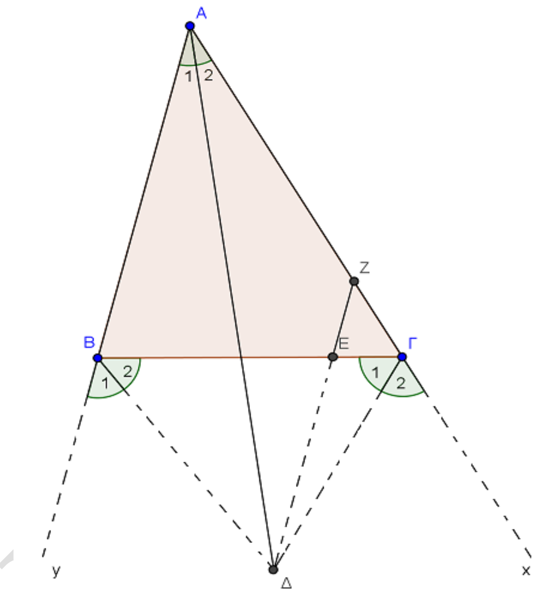
(3x2=6μον.)

Β. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$, ενώ οι ΒΔ και ΓΔ είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών των $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα .Αν είναι ΔΖ//ΑΒ να αποδείξετε ότι :

i. Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές . **(7 μον.)**

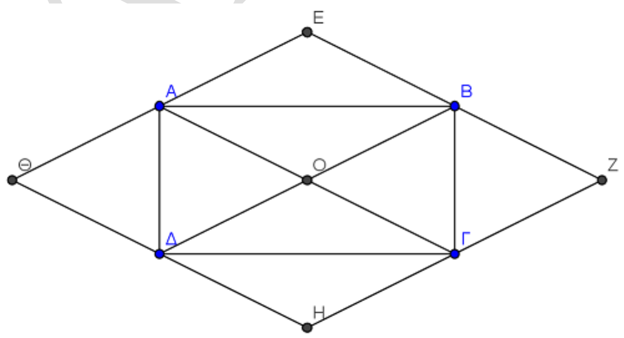
ii. ΒΕ=ΕΔ . **(6 μον.)**

iii. ΖΕ=ΑΖ-ΒΕ . **(6 μον.)**



<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Α. Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του σχήματος παίρνουμε ΘΑΕ//ΔΒ//ΗΓΖ και ΕΒΖ//ΑΓ//ΘΔΗ . Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ρόμβος .



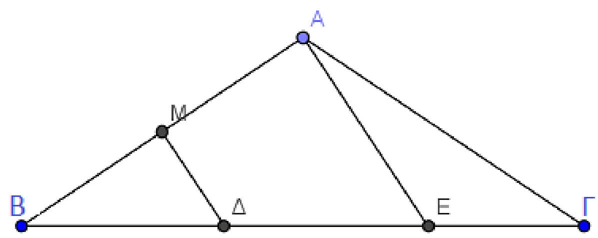
(10 μον.)

Β. Το διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 120^{\circ}$, η ΜΔ είναι μεσοκάθετη της ΑΒ και ΑΕ//ΜΔ .

i. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΓ .

ii. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο .

iii. Να αποδείξετε ότι ΒΓ=3ΒΔ .



(3x5=15 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^o:

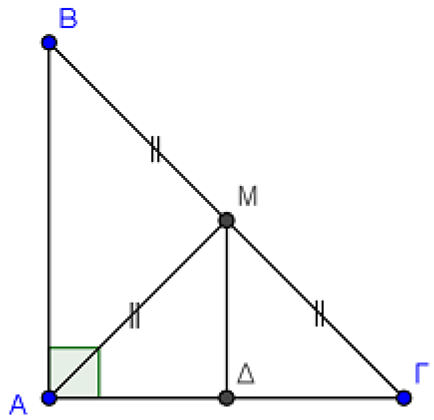
Α. Ορισμός : Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος .

Ιδιότητες τετραγώνου :

1. Οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες .
2. Όλες οι πλευρές του είναι ίσες .
3. Όλες οι γωνίες του είναι ορθές .
4. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες , τέμνονται κάθετα , διχοτομούνται και διχοτομούν τις γωνίες του .

Κριτήρια για να είναι ένα παραλληλόγραμμο τετράγωνο :

1. Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
2. Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιος του διχοτομεί μία γωνία του .
3. Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες .
4. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες .
5. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του .
6. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες .



Β. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A}=90^\circ$)και τη διάμεσό του ΑΜ . Θα αποδείξουμε ότι $AM=\frac{B\Gamma}{2}$. Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ . Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ , οπότε ΜΔ//ΑΒ .Αλλά $AB\perp A\Gamma$, επομένως και $M\Delta\perp A\Gamma$. Άρα το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ , οπότε ΑΜ=ΜΓ , δηλαδή $AM=\frac{B\Gamma}{2}$.

Γ. i.Λ **ii.**Σ **iii.**Λ **iv.**Σ **v.** Λ **vi.**Λ **vii.**Σ

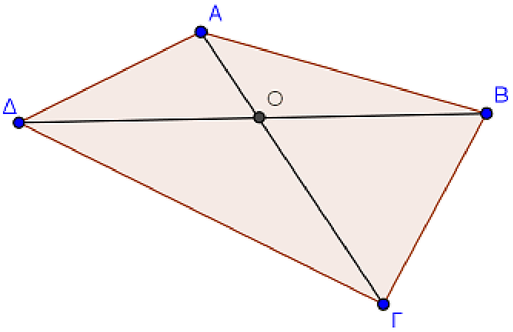
Θέμα 2^{o}:

Α. Στο $\overset{\Delta}{AOB}$ από τριγωνική ανισότητα έχουμε : ΑΒ<ΑΟ+ΟΒ .(1)

Στο $\overset{\Delta}{\Gamma O\Delta}$ από τριγωνική ανισότητα έχουμε : ΔΓ<ΟΓ+ΟΔ . (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη προκύπτει : ΑΒ+ΓΔ<ΑΟ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΔ

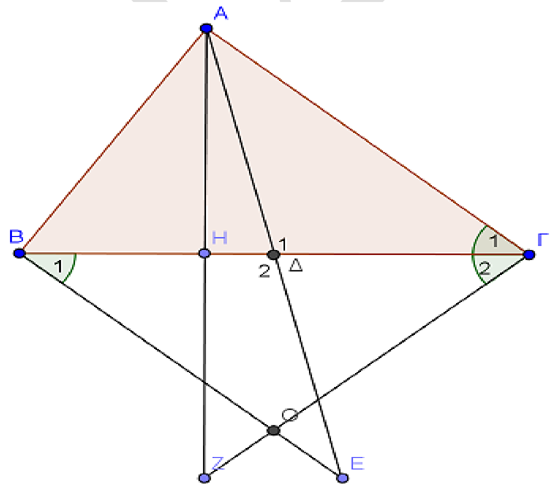
$\Leftrightarrow AB+\Gamma\Delta<A\Gamma+B\Delta$.



Β. i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{AH\Gamma}, \overset{\Delta}{\Gamma HZ}$:

$$\left.\begin{array}{l}1.AH=HZ(Y)\\ 2.H\Gamma:\text{κοινή}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία , άρα είναι ίσα .Επομένως $A\hat{\Gamma}B=B\hat{\Gamma}Z$.



ii. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}, \overset{\Delta}{B\Delta E}$:

$$\left.\begin{array}{l}1.A\Delta=\Delta E(Y)\\ 2.B\Delta=\Delta\Gamma(Y)\\ 3.\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_2(\text{ως κατακορυφήν})\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα .

iii. Από το (i) έχουμε $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (1) .Από το (ii) έχουμε $\hat{\Gamma}_1=\hat{B}_1$ (2)

Από (1),(2) έχουμε ότι $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα το $\overset{\Delta}{BO\Gamma}$ είναι ισοσκελές .

Θέμα 3^{o}:

Α. i. Είναι $\hat{y}=30^{\circ}$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΒΓ , ε_2 που τέμνονται από τη ΓΔ .

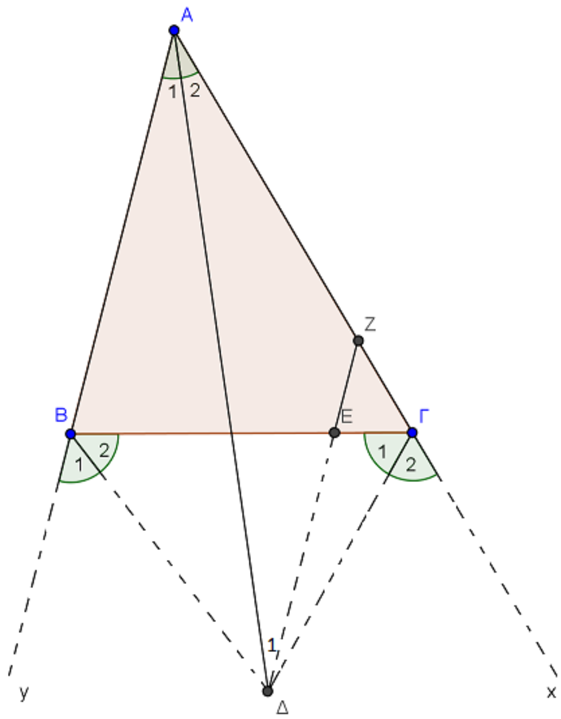
Επίσης $A\hat{B}\Gamma=180^{\circ}-50^{\circ}=130^{\circ}$ ως εντός εκτός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΒΓ , ε_1 που τέμνονται από την ΑΒ .

Οπότε $\hat{x}=360^{\circ}-130^{\circ}=230^{\circ}$

ii. Είναι $\hat{\omega} = 30^\circ$ (ως κατακορυφήν) .Τότε $\hat{y} + 30^\circ + 110^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow$ $\hat{y} = 40^\circ$. Επίσης $\hat{x} = 40^\circ$ ως εντός εκτός κι επί τα αυτά μέρη γωνίες των παραλλήλων ε_1 , ε_2 που τέμνονται από την ε .

iii. Είναι $\hat{x} = 65^\circ$ (οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες) επίσης $\hat{y} = 40^\circ + 65^\circ = 105^\circ$ ως εξωτερική του τριγώνου .

B. i.



Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A}_1$ ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ , ΖΔ που τέμνονται από την ΑΔ .

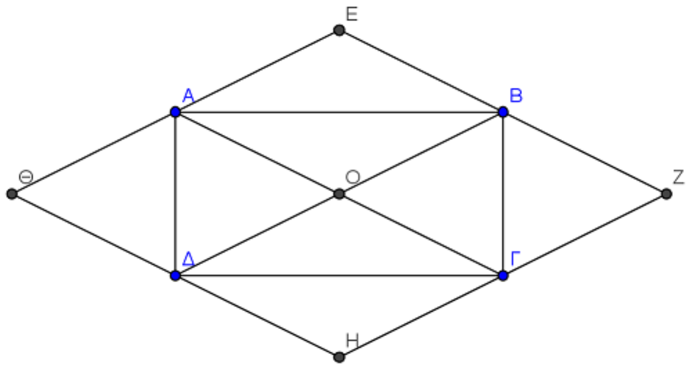
Όμως $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ εφόσον ΑΔ διχοτόμος .Άρα $\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1$.Οπότε το $\overset{\Delta}{AZ\Delta}$ είναι ισοσκελές .

ii. Είναι $B\hat{\Delta}E = \hat{B}_1$ ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ , ΔΖ που τέμνονται από την ΒΔ. Επίσης $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ εφόσον ΒΔ διχοτόμος .Επομένως $B\hat{\Delta}E = \hat{B}_2$ άρα το $\overset{\Delta}{\Delta BE}$ ισοσκελές . Οπότε ΒΕ=ΕΔ .

iii. Είναι $ZE = \Delta Z - \Delta E \underset{(ii)}{\overset{(i)}{=}} AZ - BE$ **.**

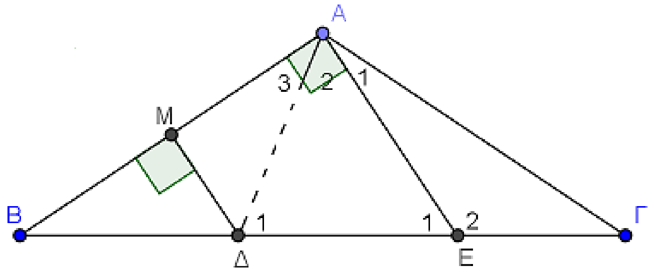
Θέμα 4^{ο}:

A.



Είναι ΘΑΕ//ΔΒ//ΗΓΖ και ΕΒΖ//ΑΓ//ΘΔΗ οπότε το ΕΖΗΘ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες , άρα είναι παραλληλόγραμμο .
Αρκεί να δείξουμε ότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες για να είναι ρόμβος .
Το ΑΟΔΘ είναι παραλληλόγραμμο (ΑΟ//ΘΔ , ΑΘ//ΟΔ)
οπότε ΑΘ=ΟΔ(1) .Ομοίως το ΕΑΟΒ είναι παραλληλόγραμμο (ΕΒ//ΑΟ , ΑΕ//ΟΒ) οπότε ΑΕ=ΟΒ(2)
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε ότι : ΕΘ=ΒΔ(3) .
Ομοίως αποδεικνύεται ότι ΕΖ=ΑΓ(4) . Εφόσον ΑΓ=ΒΔ(5) ως διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ από (3) , (4) και (5) έπεται ότι ΕΘ=ΕΖ.
Άρα το ΕΖΗΘ είναι ρόμβος .

B.



i. Εφόσον $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ισοσκελές είναι $\hat{B}=\hat{\Gamma}$.Οπότε
$\hat{\Gamma}=(180^\circ-120^\circ)/2=30^\circ$.Επίσης $\hat{A}_1=120^\circ-90^\circ=30^\circ$. Άρα
$\hat{E}_2=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$.

ii. Είναι $\hat{E}_1=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.Εφόσον ΜΔ μεσοκάθετος του ΑΒ ΑΔ=ΔΒ οπότε $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Delta}}$:ισοσκελές .Άρα $\hat{A}_3=30^\circ$.Επομένως $\hat{A}_2=120^\circ-\left(\hat{A}_3+\hat{A}_1\right)=60^\circ$.Εφόσον το $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ έχει δύο γωνίες ίσες με 60° , θα έχει και την τρίτη ίση με 60° , επομένως είναι ισόπλευρο .

iii. Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{BAE}}\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ είναι $\hat{B}=30^\circ$ άρα $AE=\frac{1}{2}BE$.
Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta A\Gamma}}\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ είναι $\hat{\Gamma}=30^\circ$ άρα $A\Delta=\frac{1}{2}\Delta\Gamma$.
Όμως $A\Delta\overset{(ii)}{=}AE=\frac{1}{2}BE$ οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος οπότε ΒΔ=ΔΕ .Ομοίως $AE\overset{(ii)}{=}A\Delta=\frac{1}{2}\Delta\Gamma$ άρα ΑΕ διάμεσος. Οπότε ΔΕ=ΕΓ .Τελικά ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ άρα ΒΓ=3ΒΔ .