ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **31**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη: Τρίγωνα **02-12-12**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Να αποδείξετε ότι δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα . **(7 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος . **(8 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)Σωστό** ή **(Λ)Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Με μ_α συμβολίζουμε τη διχοτόμο που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ . **Σ Λ**

ii. Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας , οποιοδήποτε σημείο της. **Σ Λ**

iii Σ'ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει β>γ αν και μόνο αν $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. **Σ Λ**

iv.Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής . **Σ Λ**

v. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους , τότε είναι ίσα . **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. i . Δίνονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΔΖ και ΚΡΣ με ΑΔ=ΚΡ και ΔΖ=ΡΣ .Ενώστε με μια γραμμή τα στοιχεία του τριγώνου ΑΔΖ της στήλης Α με τα αντίστοιχα ίσα τους του τριγώνου ΚΡΣ της στήλης Β .

<u>Στήλη Α</u>	**<u>Στήλη Β</u>**
	ΡΣ
ΑΖ	$\hat{P}$
$\hat{A}$	$\hat{K}$
$\hat{\Delta}$	$\hat{\Sigma}$
	ΚΣ

(6 μον.)

ii. Στον επόμενο πίνακα , σε κάθε περίπτωση , δίνονται τα μήκη των ακτίνων και της διακέντρου δύο κύκλων .Να βρεθεί ο αριθμός των κοινών σημείων των δύο κύκλων και να γίνει το αντίστοιχο σχήμα .

	Μήκος διακέντρου δ	Μήκος ακτίνας R	Μήκος ακτίνας ρ	Αριθμός κοινών σημείων	Σχήμα
Α	7	3	2		
Β	5	4	3		
Γ	6	4	2		
Δ	4	8	2		
Ε	7	10	3		

(5x2=10μον.)

Β. Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του , είναι τμήμα ίσο με αυτό . **(9 μον.)**

Θέμα 3^o:

Α. Αν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $\hat{A}=4x$, $\hat{B}=50^\circ-2x$ και $\hat{\Gamma}=150^\circ-6x$ να χαρακτηρίσετε το τρίγωνο ως προς τις πλευρές και τις γωνίες του . **(5 μον.)**

Β. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ .Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΕ και ΓΖ και στην πλευρά ΒΓ τμήματα $BH=\Gamma\Theta<\frac{B\Gamma}{2}$

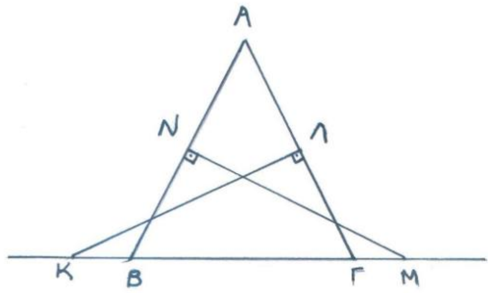
i. Να δείξετε ότι τα τμήματα ΕΖ και ΖΘ είναι ίσα. **(8 μον.)**

ii. Αν η ΕΗ και η ΖΘ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Δ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΗΘ είναι ισοσκελές. **(7 μον.)**

Γ. Αν ΑΔ=δα είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές β>γ>α να αποδείξετε ότι : $\beta+\gamma-\alpha<2\delta_\alpha<\alpha+\beta+\gamma$ **(5 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α . Θέλουμε να στερεώσουμε στο έδαφος μια επιφάνεια ΑΒΓ σχήματος ισοσκελούς τριγώνου .Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τα τμήματα ΚΛ και ΜΝ σύρματος των οποίων το ένα άκρο τους δένεται με τα μέσα των ίσων πλευρών της τριγωνικής επιφάνειας και το άλλο τους άκρο στερεώνεται στο έδαφος .Αν οι διευθύνσεις των συρμάτων είναι κάθετες προς τις ίσες πλευρές , να αποδείξετε ότι :

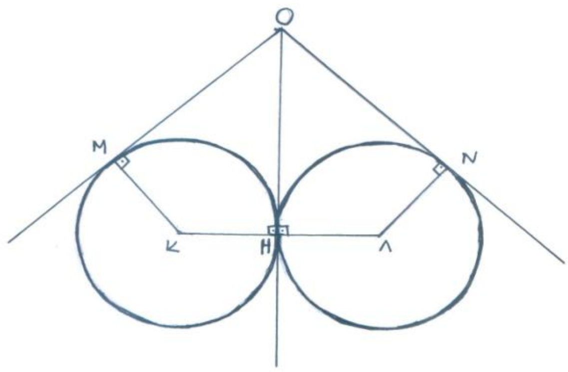


i. Τα μήκη των συρμάτων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ίσα . **(4 μον.)**

ii. ΚΒ=ΓΜ. **(3 μον.)**

iii. Αν συνδέσουμε με δύο άλλα σύρματα την κορυφή Α με τα άκρα Κ και Μ των συρμάτων , τότε τα μήκη των συρμάτων θα είναι ίσα . **(5 μον.)**

Β.



Στο παραπάνω σχήμα ΟΗ , ΟΜ , ΟΝ είναι εφαπτόμενες. Οι δύο κύκλοι είναι ίσοι και εφάπτονται εξωτερικά στο Η .

i. Να δείξετε ότι ΟΜ=ΟΗ=ΟΝ **(3 μον.)**

ii.Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΚΛ είναι ισοσκελές . **(4 μον.)**

iii. Να δείξετε ότι οι προεκτάσεις των ΜΚ , ΝΛ τέμνονται πάνω στην προέκταση της ΟΗ .

Αν Θ το σημείο τομής τους να δείξετε ότι το $\overset{\Delta}{ΜΝΘ}$ είναι ισοσκελές . **(6 μον.)**

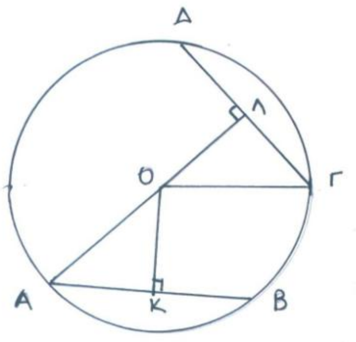
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

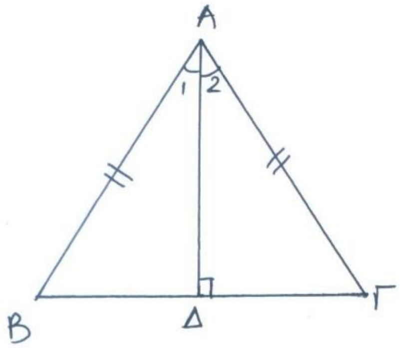
Α.



($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ).
Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^\circ$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ$\Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$

Β.



Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ΒΓ.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta B}, \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1. AB = A\Gamma(Y) \\ 2. A\Delta : \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα. Οπότε ΒΔ=ΔΓ, δηλαδή ΑΔ και διάμεσος. Επίσης $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ άρα ΑΔ και διχοτόμος.

Γ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Σ **v.**Λ

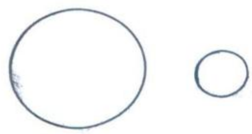
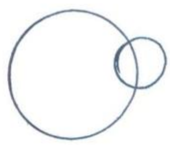
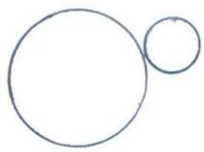
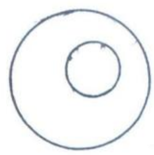
Θέμα 2^{ο}:

Α. i. $ΑΖ = ΚΣ$

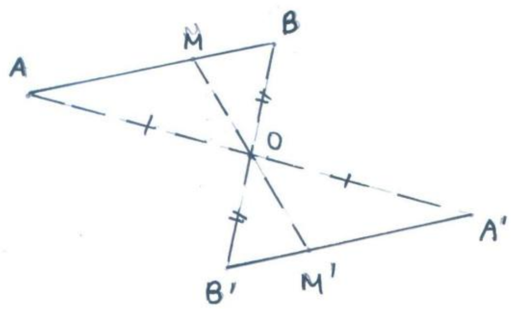
$\hat{Α} = \hat{Κ}$

$\hat{Δ} = \hat{Ρ}$

ii.

	Μήκος διακέντρου δ	Μήκος ακτίνας R	Μήκος ακτίνας ρ	Αριθμός κοινών σημείων	Σχήμα
Α	7	3	2	0	
Β	5	4	3	2	
Γ	6	4	2	1	
Δ	4	8	2	0	
Ε	7	10	3	1	

Β.



Έστω ένα τμήμα ΑΒ , σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και Α΄ , Β΄ τα συμμετρικά των Α , Β ως προς το Ο αντίστοιχα.

Επειδή $OA' = OA, \quad OB' = OB$ και $A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$ τα τρίγωνα ΑΟΒ και Α΄ΟΒ΄ είναι ίσα , οπότε Α΄Β΄=ΑΒ .Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συμμετρικά ως προς το Ο .Έστω σημείο Μ του ΑΒ και Μ΄ η τομή της ΜΟ με το Α΄Β΄ .Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και Α΄ΟΜ΄ είναι ίσα γιατί έχουμε ΟΑ΄=ΟΑ , $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.Επομένως ΟΜ΄=ΟΜ, που σημαίνει ότι το Μ΄ είναι συμμετρικό του Μ .Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου Μ΄ του Α΄Β΄ είναι σημείο του ΑΒ .Άρα τα ΑΒ,Α΄Β΄ είναι συμμετρικά ως προς το Ο .

Θέμα 3ο:

Α. Είναι $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 4x + 50^\circ - 2x + 150^\circ - 6x = 180^\circ \Leftrightarrow$

$$4x - 2x - 6x = 180^\circ - 150^\circ - 50^\circ \Leftrightarrow -4x = -20 \Leftrightarrow x = 5^\circ$$

Άρα $\hat{A} = 4x = 4 \cdot 5 = 20^\circ$

$$\hat{B} = 50^\circ - 2x = 50^\circ - 2 \cdot 5^\circ = 40^\circ$$

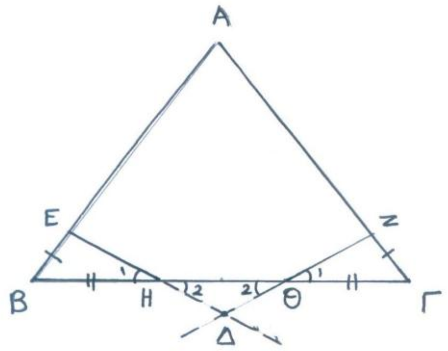
$$\hat{\Gamma} = 150^\circ - 6x = 150^\circ - 6 \cdot 5^\circ = 120^\circ$$

Εφόσον $\hat{\Gamma} = 120^\circ > 90^\circ$ το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο .

Επίσης , $\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{\Gamma}$ άρα $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ δηλαδή το τρίγωνο είναι σκαληνό .

Άρα το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο , σκαληνό .

Β.



Υ	ΑΒ=ΑΓ ΕΒ=ΖΓ,ΒΗ=ΘΓ
Σ	i. ΕΗ=ΖΘ ii. $\overset{\Delta}{\Delta H\Theta}$ ισοσκελές

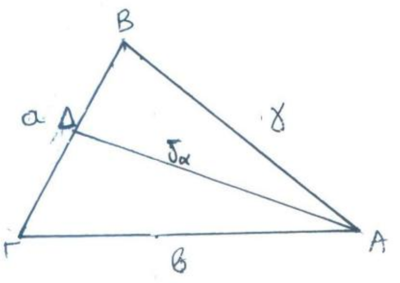
i. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{EBH}$, $\overset{\Delta}{Z\Gamma H}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.EB = Z\Gamma(Y) \\ 2.BH = \Theta\Gamma(Y) \\ 3.\hat{B} = \hat{\Gamma}(\text{ως προσκ.στη βάση του ισοσκ.}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα , άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα , δηλαδή ΕΗ=ΗΘ.

ii. Από την προηγούμενη σύγκριση έχουμε ότι $\hat{H}_1 = \hat{\Theta}_1$.Όμως $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ ως κατακορυφήν και $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2$ ομοίως .Οπότε τελικά $\hat{H}_2 = \hat{\Theta}_2$.Εφόσον οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες , το $\overset{\Delta}{\Delta H\Theta}$ είναι ισοσκελές .

Γ.



Στο $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$ από τριγωνική ανισότητα έχουμε :

$$\beta - \Delta\Gamma < \delta_\alpha < \beta + \Delta\Gamma \qquad (1)$$

Στο $\overset{\Delta}{A\Delta B}$ από τριγωνική ανισότητα έχουμε :

$$\gamma - B\Delta < \delta_\alpha < \gamma + B\Delta \qquad (2)$$

Προσθέτοντας την (1) και (2) έχουμε :

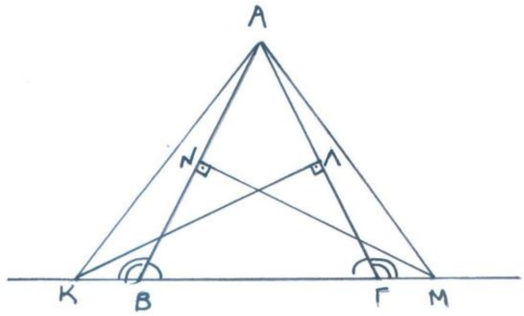
$$\beta+\gamma-\Delta\Gamma-\mathrm{B}\Delta<2\delta_\alpha<\beta+\gamma+\Delta\Gamma+\mathrm{B}\Delta \Leftrightarrow$$

$$\beta+\gamma-(\mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma)<2\delta_\alpha<\beta+\gamma+\mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma \overset{\mathrm{B}\Delta+\Delta\Gamma=\alpha}{\Leftrightarrow}$$

$$\beta+\gamma-\alpha<2\delta_\alpha<\beta+\gamma+\alpha$$

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Α.



i. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια $\overset{\Delta}{\mathrm{MNB}}, \overset{\Delta}{\mathrm{K}\Lambda\Gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{\Gamma}=\hat{\mathrm{B}} \text{ (ως προσκ.στη βάση ισοσκ.)} \\ 2.\Lambda\Gamma=\mathrm{BN} \text{ (ως μισά ίσων πλευρών)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία γωνία ίσες μία προς μία ,άρα είναι ίσα .Επομένως , όλα τους τα στοιχεία ίσα , δηλαδή ΚΛ=ΜΝ .

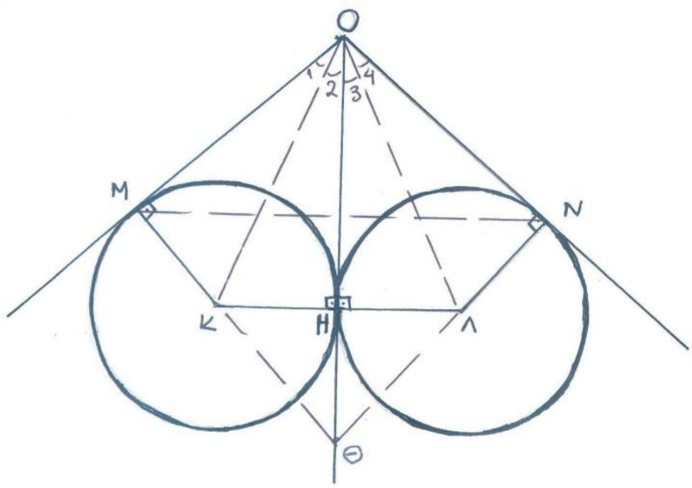
ii. Από προηγούμενη σύγκριση (i) έχουμε ότι ΚΓ=ΜΒ $\Leftrightarrow$ ΚΒ+ΒΓ=ΒΓ+ΓΜ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{KB}=\Gamma\mathrm{M}$.

iii. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABK}}, \overset{\Delta}{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{M}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A}\Gamma(\Upsilon) \\ 2.\hat{\mathrm{B}}\varepsilon\xi=\hat{\Gamma}\varepsilon\xi \text{ (ως παραπληρώματα ίσων γωνιών)} \\ 3.\mathrm{KB}=\Gamma\mathrm{M} \text{ (ii)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα άρα όλους τα στοιχεία ίσα , δηλαδή ΑΚ=ΑΜ .

Β.



i. Στον κύκλο (Κ , ΚΗ) οι ΟΜ , ΟΗ είναι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Ο , επομένως ΟΜ=ΟΗ (1)
Στον κύκλο (Λ , ΛΗ) οι ΟΗ , ΟΝ είναι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το Ο , επομένως ΟΗ=ΟΝ (2)
Από (1) και (2) έχουμε ότι ΟΜ=ΟΗ=ΟΝ .

ii. Στο $\overset{\Delta}{\text{ΟΚΛ}}$ η ΟΗ είναι και ύψος και διάμεσος , εφόσον ΟΗ εφαπτόμενη στους δύο κύκλους άρα $\text{ΟΗ} \perp \text{ΚΛ}$ και $\text{ΚΗ} = \text{ΗΛ}(=\rho)$.

Άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΟΚΛ}}$ είναι ισοσκελές .

iii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια $\overset{\Delta}{\text{ΟΜΚ}}, \overset{\Delta}{\text{ΟΝΛ}}$ **:**

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΟΜ} = \text{ΟΝ}(i) \\ 2.\text{ΟΚ} = \text{ΟΛ}(ii) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία , άρα είναι ίσα , άρα $\hat{\text{Ο}}_1 = \hat{\text{Ο}}_4$

Επίσης εφόσον $\overset{\Delta}{\text{ΟΚΛ}}$ ισοσκελές και ΟΗ διάμεσος θα είναι και διχοτόμος άρα $\hat{\text{Ο}}_2 = \hat{\text{Ο}}_3$.Τελικά $\hat{\text{Ο}}_{1,2} = \hat{\text{Ο}}_{3,4}$ (ως αθροίσματα ίσων γωνιών). Τότε : Έστω ότι η προέκταση της ΜΚ τέμνει την ΟΗ στο Ζ και η προέκταση της ΝΛ στο Ι .

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια $\overset{\Delta}{OMZ}, \overset{\Delta}{ONI}$

$$\left.\begin{array}{l} 1.OM = ON(i) \\ 2.\hat{O}_{1,2} = \hat{O}_{3,4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία γωνία ίσες μία προς μία , άρα είναι ίσα .Επομένως , ΟΖ=ΟΙ δηλαδή το Ζ≡Ι .

Για να δείξουμε ότι $\overset{\Delta}{MN\Theta}$ ισοσκελές , αρκεί να δείξουμε ότι ΘΜ=ΘΝ .Η ΟΘ από πριν είναι μεσοκάθετος του ΚΛ , άρα κάθε σημείο της θα ισαπέχει από τα Κ , Λ .Δηλαδή ΘΚ=ΘΛ (1) .Επίσης ΚΜ=ΛΝ(=ρ) (2)
Προσθέτοντας τις (1) και (2) προκύπτει :ΘΚ+ΚΜ=ΘΛ+ΛΝ⇔ ΘΜ=ΘΝ δηλαδή το ζητούμενο .