ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

3
Β' Λυκείου
Ον/μο:………………………… **ΕΠΑ.Λ.**
Ύλη: Τριγωνομετρία **27/01/2015**

Θέμα 1^o:

Α. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$. **(9 μον.)**

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i. $\eta\mu(\alpha+\beta)=$.........................

ii. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=$.........................

iii. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=$............................ **(3x2=6 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ$. **Σ Λ**

ii. Η εξίσωση $\eta\mu x = \sqrt{3}$ έχει άπειρες λύσεις. **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x + 1$ έχει μέγιστη τιμή το 3. **Σ Λ**

iv. $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$. **Σ Λ**

v. $\eta\mu\left(\dfrac{13\pi}{2}+x\right) = \sigma\upsilon\nu x$. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Να μετατραπεί σε μοίρες η γωνία $\dfrac{3\pi}{10}\text{rad}$. **(12 μον.)**

Β. Αν ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{3}{5}$ με $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$, να υπολογισθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας θ. **(13 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{συνω}{1+ημω}=\frac{1-ημω}{συνω}$. **(12 μον.)**

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\frac{εφ(π+x)\cdot συν(2π-x)\cdot συν\left(\frac{11π}{2}-x\right)}{ημ(7π-x)\cdot ημ\left(\frac{13π}{2}+x\right)\cdot σφ\left(\frac{21π}{2}+x\right)}.$$ **(13 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:
$f(x)=4ημ2x$. **(13 μον.)**

Β. Να λύσετε της εξίσωση $2ημ^2x-3ημx+1=0$. **(12 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}:

Α. Είναι: $\varepsilon\varphi x\cdot\sigma\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=1.$

Β. i. $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\beta.$

ii. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}.$

iii. $\sigma\upsilon\nu2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=1-2\eta\mu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1.$

Γ. i.Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2^{ο}:

Α. Έχουμε: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180^\circ}\Leftrightarrow\frac{\frac{3\pi}{10}}{\pi}=\frac{\mu}{180^\circ}\Leftrightarrow\frac{3\pi}{10\pi}=\frac{\mu}{180^\circ}\Leftrightarrow10\mu=3\cdot180^\circ\Leftrightarrow$

$$10\mu=540^\circ\Leftrightarrow\mu=\frac{540^\circ}{10}\Leftrightarrow\mu=54^\circ.$$

Β. Έχουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{3}{5}$ με $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$. Είναι:

$$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta=1-\frac{9}{25}\Leftrightarrow\eta\mu^2\theta=\frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow\eta\mu\theta=\pm\frac{4}{5}\overset{\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}}{\Leftrightarrow}\eta\mu\theta=-\frac{4}{5}.$$

Τότε: $\varepsilon\varphi\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4\cdot5}{3\cdot5}=-\frac{4}{3}.$

Τέλος είναι: $\sigma\varphi\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}\Leftrightarrow\sigma\varphi\theta=-\frac{3}{4}.$

Θέμα 3ο:

Α. Έχουμε: $\dfrac{συνω}{1+ημω}=\dfrac{1-ημω}{συνω}\Leftrightarrow συν^2ω=(1-ημω)(1+ημω)\Leftrightarrow$

$συν^2ω=1-ημ^2ω\Leftrightarrow συν^2ω+ημ^2ω=1$ που ισχύει.

Β. $A=\dfrac{εφ(π+x)\cdot συν(2π-x)\cdot συν\left(\dfrac{11π}{2}-x\right)}{ημ(7π-x)\cdot ημ\left(\dfrac{13π}{2}+x\right)\cdot σφ\left(\dfrac{21π}{2}+x\right)}$

$A=\dfrac{εφx\cdot συνx\cdot(-ημx)}{ημx\cdot συνx\cdot(-εφx)}$

$A=1$

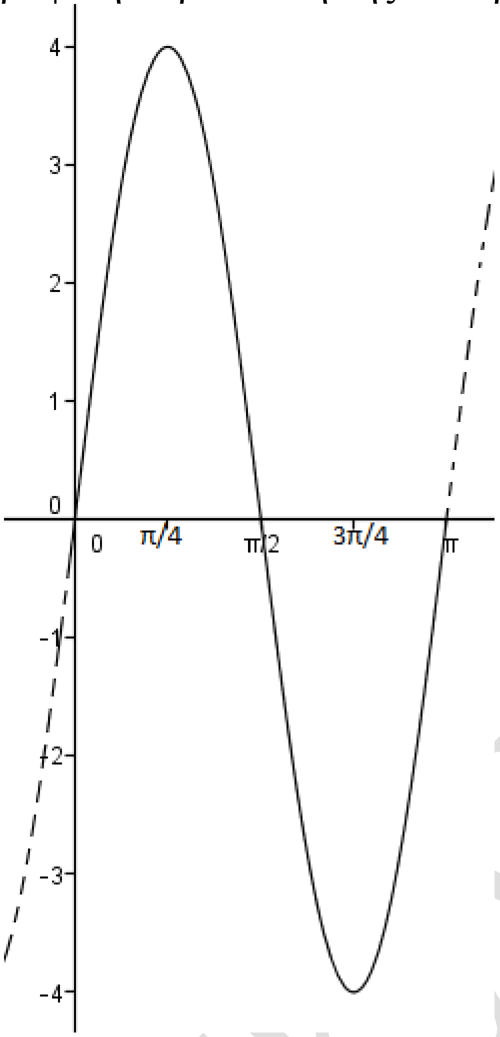
Θέμα 4ο:

Α. Για τη γραφική παράσταση της $f(x)=4ημ2x$ έχουμε:

$T=\dfrac{2π}{|ω|}=\dfrac{2π}{2}=π$ και $β=\dfrac{T}{4}=\dfrac{π}{4}$. Τότε ο πίνακας τιμών της είναι:

x	0	$\frac{π}{4}$	$\frac{2π}{4}=\frac{π}{2}$	$\frac{3π}{4}$	$\frac{4π}{4}=π$
2x	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
ημ2x	0	1	0	-1	0
4ημ2x	0	4	0	-4	0

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι:



Β. Έχουμε την εξίσωση: $2\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 1 = 0$ **(1)**. Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$ και η **(1)** γίνεται : $2\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει: $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 1 > 0$. Άρα έχει δύο άνισες λύσεις τις:

$$\omega_{1,2} = \frac{3\pm 1}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Οπότε έχουμε: $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$

ή

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$