ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ **29**

Ον/μο:……………….. **Α΄ Λυκείου**

Ύλη:Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα , Τρίγωνα , Παράλλληλες ευθείες , Παραλληλόγραμμα-Τραπέζια **11-03-12**

Θέμα 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι δυο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα . **(5 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι 2 ορθές . **(4 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας . **(6 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)**Σωστό ή **(Λ)**Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν :

i. Το άθροισμα μιας κυρτής γωνίας με την αντίστοιχη μη κυρτή της είναι μια πλήρης γωνία . **Σ Λ**

ii. Ένα τρίγωνο λέγεται οξυγώνιο αν έχει μία οξεία γωνία. **Σ Λ**

iii . Δύο γωνίες με πλευρές παράλληλες μία προς μία αποκλείεται να είναι παραπληρωματικές . **Σ Λ**

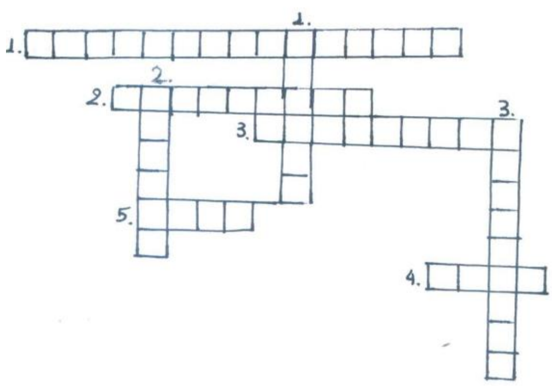
iv. Αν σε σκαληνό τρίγωνο η μικρότερη γωνία είναι 45° τότε αυτό αποκλείεται να είναι ορθογώνιο . **Σ Λ**

v. Το βαρύκεντρο είναι μέσο της κάθε διαμέσου . **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Να συμπληρώσετε το παρακάτω σταυρόλεξο :



ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ

1. Λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις πλευρές του παράλληλες .

2. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες .

3. Ένα παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο αν οι διαγώνιοι του είναι ίσες και η μία .... μία γωνία του .

4. Είναι οι γωνίες που πρόσκεινται σε μία βάση του ισοσκελούς τραπεζίου.

5. Το τετράγωνο έχει .... τις γωνίες ορθές . **(5x2=10 μον.)**

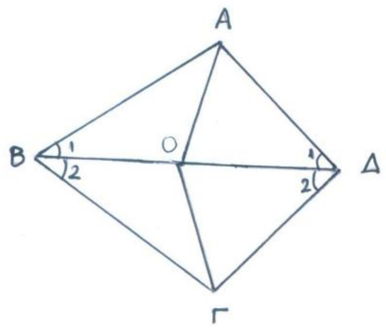
ΚΑΘΕΤΑ

1. Για να είναι ένα τετράπλευρο παραλληλόγραμμο , αρκεί οι απέναντι .... του να είναι ανά δύο ίσες .

2. Λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες .

3. .... τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές του είναι ίσες . **(3x1=3 μον.)**

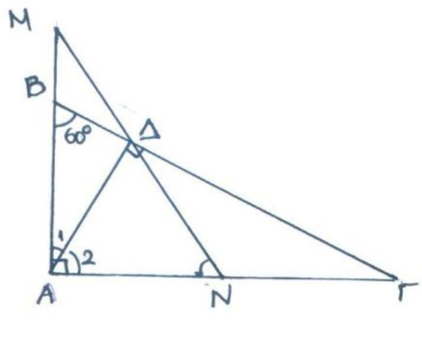
Β. Στο τετράπλευρο του διπλανού σχήματος δίνεται ότι ΑΒ=ΒΓ και ΑΟ=ΟΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.



(12 μον.)

<u>Θέμα 3^{ο}:</u>

Α. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ΑΔ του ύψος του τριγώνου ΑΒΓ . Αν ΒΜ=ΒΔ να αποδείξετε ότι :

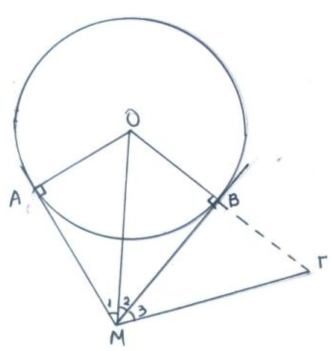


i. $B\hat{M}\Delta = 30^\circ$. **(4 μον.)**

ii. $A\hat{N}\Delta = 60^\circ$**.** **(6 μον.)**

iii. Το $\overset{\triangle}{A\Delta N}$ είναι ισόπλευρο . **(5 μον.)**

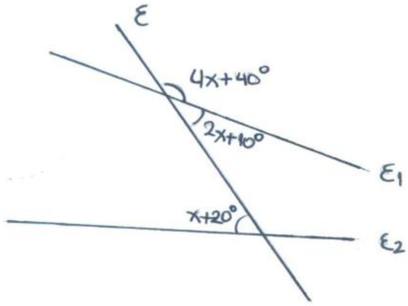
Β. Στο διπλανό σχήμα οι ΜΑ και ΜΒ είναι εφαπτόμενες του κύκλου και ΟΒ=ΒΓ .
Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A\hat{M}\Gamma} = 3\mathrm{B\hat{M}\Gamma}$.



(10μον.)

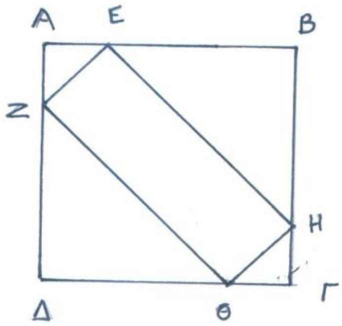
<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να βρείτε στο διπλανό σχήμα αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 που τέμνονται από την ε είναι παράλληλες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας .



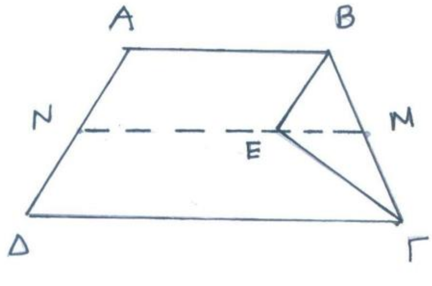
(5μον.)

Β. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε ΑΕ=ΑΖ=ΓΘ=ΓΗ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα . Να αποδείξετε ότι το ΕΖΘΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .



(10μον.)

Γ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ του διπλανού τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνει τη διάμεσό του ΜΝ στο σημείο Ε .Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{B\hat{E}\Gamma} = 90^\circ$



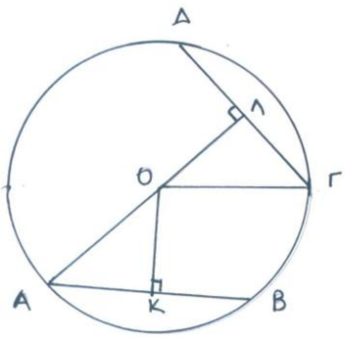
(10 μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ(Ενδεικτικές)

Θέμα 1^{ο}

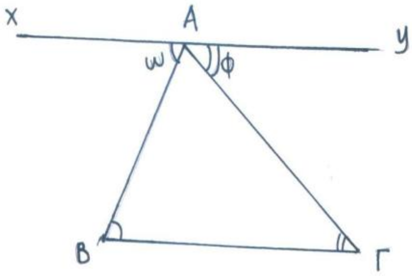
Α.



($\Rightarrow$) Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ , ΟΛ τα αποστήματα τους αντίστοιχα .Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ , έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{\circ}$, ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΑΚ=ΓΛ(αφού ΑΒ=ΓΔ). Επομένως είναι ίσα , οπότε ΟΚ=ΟΛ.

($\Leftarrow$) Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα . Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90^{\circ}$,ΟΑ=ΟΓ(=ρ) και ΟΚ=ΟΛ άρα είναι ίσα . Οπότε , ΑΚ=ΓΛ$\Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow AB = \Gamma\Delta$

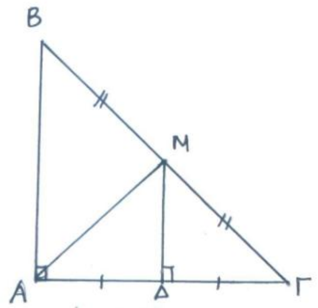
Β.



Από μία κορυφή , π.χ την Α , φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\hat{\omega} = \hat{\beta}$ (1) και $\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}$ (2) ως εντός κι εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα .Αλλά $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\varphi} = 2L$ (3)

Από τις (1) , (2) και(3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2L$.

Γ.



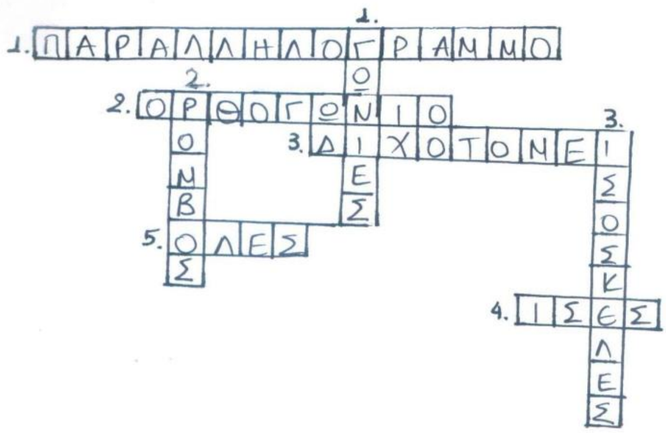
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και τη διάμεσό του ΑΜ .Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$. Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$,οπότε ΜΔ//ΑΒ .Αλλά $AB \perp A\Gamma$,

άρα $M\Delta \perp A\Gamma$.Επομένως , το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$, οπότε ΑΜ=ΜΓ , δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$

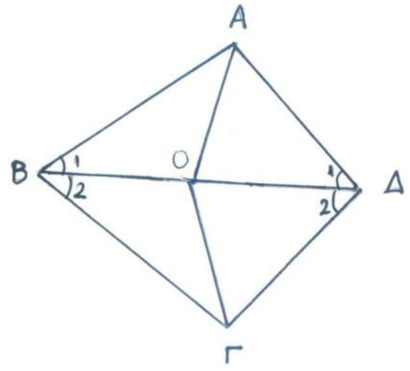
Δ. **i.** Σ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.**Λ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α.



Β.



Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{\mathrm{AOB}}, \overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma BO}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}(\Upsilon) \\ 2.\mathrm{AO} = \mathrm{O\Gamma}(\Upsilon) \\ 3.\mathrm{BO}: \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Από Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα.

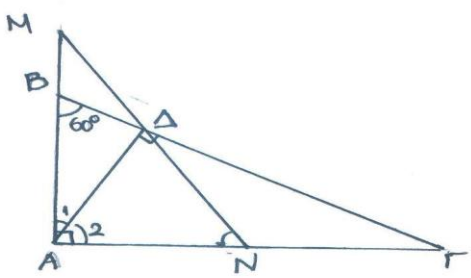
Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta B}}, \overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\Delta B}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB} = \mathrm{B\Gamma}(\Upsilon) \\ 2.\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 (\text{από προηγούμενη σύγκριση}) \\ 3.\mathrm{B\Delta}: \text{κοινή} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Από Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, επομένως έχουν όλα τους τα στοιχεία ίσα άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.



i. Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{MB\Delta}}$ είναι $\hat{\mathrm{B}}\varepsilon\xi = 60^\circ$ άρα $\hat{\mathrm{M}} + \hat{\Delta} = 60^\circ$.Όμως ΒΜ=ΒΔ

δηλαδή $\overset{\triangle}{\mathrm{MB\Delta}}$ ισοσκελές , άρα $\hat{\mathrm{M}} = \hat{\Delta}$.Οπότε :

$\hat{\mathrm{M}} + \hat{\Delta} = 60^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\mathrm{M}} = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{\mathrm{M}} = 30^\circ$.Άρα $\mathrm{B\hat{M}\Delta} = 30^\circ$.

ii. Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{AMN}}$ έχουμε $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ, \hat{\mathrm{M}} = 30^\circ$. Οπότε :

$\hat{N}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.Άρα $A\hat{N}\Delta=60^\circ$.

iii. Στο $B\overset{\triangle}{\Delta}A$ είναι $\hat{\Delta}=90^\circ$ και $\hat{B}=60^\circ$ άρα

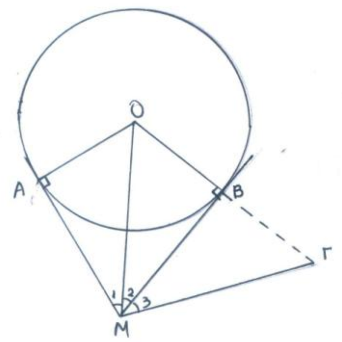
$\hat{A}_1=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

Όμως $\hat{A}=90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_1+\hat{A}_2=90^\circ \Leftrightarrow \hat{A}_2=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

Άρα $A\overset{\triangle}{\Delta}N$ είναι $\hat{N}=60^\circ$, $\hat{A}_2=60^\circ$ οπότε και

$\hat{\Delta}=60^\circ$ άρα $A\overset{\triangle}{\Delta}N$: ισόπλευρο .

B.



Εφόσον ΜΑ , ΜΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου , έπεται ότι η διακεντρική ευθεία ΜΟ θα διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν. Άρα $\hat{M}_1=\hat{M}_2$ (1)

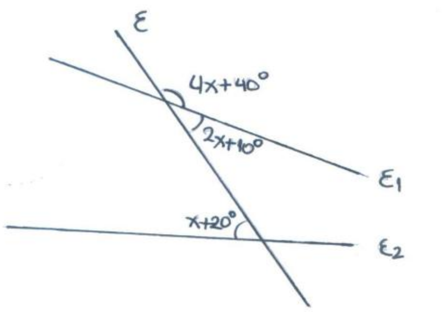
Επίσης εφόσον ΟΒ=ΟΓ και $MB\perp O\Gamma$ έπεται ότι στο $M\overset{\triangle}{O}\Gamma$ η ΜΒ είναι διάμεσος και ύψος , άρα είναι ισοσκελές , δηλαδή θα είναι και διχοτόμος .Επομένως $\hat{M}_2=\hat{M}_3$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{M}_1=\hat{M}_2=\hat{M}_3$

Άρα $A\hat{M}\Gamma=A\hat{M}O+O\hat{M}B+B\hat{O}\Gamma=3B\hat{M}\Gamma$.

Θέμα 4ο:

Α.



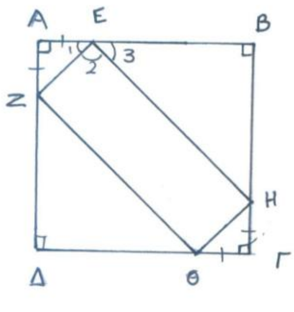
Για να είναι παράλληλες πρέπει να σχηματίζουν τις εντός κι εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα $2x+10^\circ = x+20^\circ \Leftrightarrow 2x-x=20^\circ-10^\circ \Leftrightarrow x=10^\circ$

Για $x=10^\circ$ έχουμε : $4x+40^\circ+2x+10^\circ = 4\cdot 10^\circ+40^\circ+2\cdot 10^\circ+10^\circ =$

$$=40^\circ+40^\circ+20^\circ+10^\circ=110^\circ \neq 180^\circ$$

Άρα οι ευθείες δεν είναι παράλληλες .

Β.



Συγκρίνουμε τα ορθογώνια $\overset{\triangle}{EBH}, \overset{\triangle}{Z\Delta\Theta}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.EB = Z\Delta (AB=A\Delta \text{ και } AE=AZ) \\ 2.BH=\Delta\Theta (B\Gamma=\Delta\Gamma \text{ και } H\Gamma=\Theta\Gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα , άρα ΕΗ=ΖΘ (1)

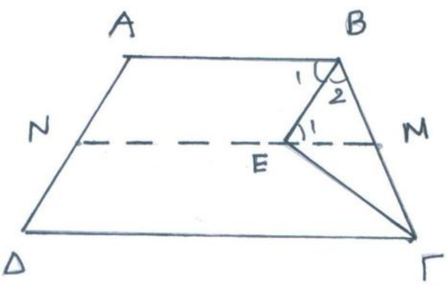
Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΖ , ΗΓΘ :

$$\left.\begin{array}{l} 1.AE=H\Gamma(Y) \\ 2.AZ=\Theta\Gamma(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Τα τρίγωνα είναι ίσα , άρα ΖΕ=ΗΘ(2)

Από (1) και (2) έπεται ότι το τετράπλευρο ΕΖΘΗ έχει ανά δύο τις πλευρές του ίσες .Άρα είναι παραλληλόγραμμο .Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχει μια γωνία ορθή .Το $\overset{\triangle}{EAZ}$ είναι ισοσκελές ορθογώνιο , εφόσον ΑΕ=ΖΕ άρα $\hat{E}_1 = 45^\circ$.

Ομοίως το $\overset{\triangle}{BEM}$ είναι ισοσκελές ορθογώνιο , εφόσον ΕΒ=ΒΗ άρα $\hat{E}_3 = 45^\circ$.Όμως $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{E}_3 = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_2 = 180^\circ - 90^\circ \Leftrightarrow \hat{E}_2 = 90^\circ$
Άρα το ΕΖΘΗ είναι ορθογώνιο .

Γ.



Εφόσον η ΜΝ είναι διάμεσος του τραπεζίου έπεται ότι η ΕΜ διάμεσος του $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$.Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $EM = \frac{1}{2}B\Gamma$.

Έχουμε $\hat{E}_1 = \hat{B}_1$ ως εντός κι εναλλάξ γωνίες των παραλλήλων ΑΒ , ΜΝ που τέμνονται από τη ΒΕ .
Επίσης ΒΕ:διχοτόμος της $\hat{B}$ άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$.Οπότε τελικά προκύπτει ότι $\hat{B}_2 = \hat{E}_1$ οπότε το $\overset{\triangle}{BEM}$ ισοσκελές ,δηλαδή ΒΜ=ΕΜ .Όμως ΒΜ=ΜΓ δηλαδή $BM = \frac{1}{2}B\Gamma$.

Επομένως $EM = \frac{1}{2}B\Gamma$, δηλαδή $B\hat{E}\Gamma = 90^\circ$