ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ον/μο:……………….. Α΄ Λυκείου
Ύλη: Τρίγωνα Γεν. Παιδείας
11-12-11

Θέμα 1ο:

Α. Να αποδείξετε ότι σε ένα ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος.

(Μον.6)

Β. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

(Μον.7)

Γ. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν.

i. Με δ_α συμβολίζουμε τη διάμεσο που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$. **Σ Λ**

ii. Αν $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ τότε $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$. **Σ Λ**

iii. Σε ένα τρίγωνο απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες. **Σ Λ**

iv. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ίσα. **Σ Λ**

v. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε έχουν ίσες περιμέτρους. **Σ Λ**

vi. Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών ισοσκελών τριγώνων $\overset{\triangle}{AB\Gamma}(AB = A\Gamma)$ που έχουν σταθερή βάση είναι η μεσοκάθετος της βάσης ΒΓ. **Σ Λ**

(Μον.6x2=12)

Θέμα 2^{o}:

Α. Να συμπληρωθεί όπου υπάρχει με κατάλληλο σχήμα ο παρακάτω πίνακας.

Τρίγωνα	Ισοσκελές	Ισόπλευρο	Σκαληνό
Οξυγώνιο			
Ορθογώνιο			
Αμβλυγώνιο			

(Μον.15)

Β. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

i. Να βρείτε το συμμετρικό του ΑΒ ως προς σημείο Ο που δεν ανήκει στο φορέα του.

ii. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το συμμετρικό του είναι ίσα.

(Μον.2x5=10)

Θέμα 3^{o}:

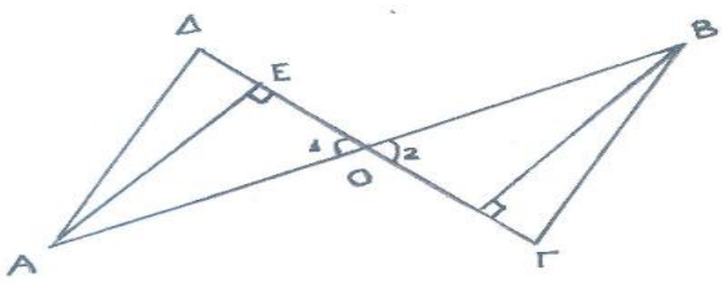
Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει α<τ, όπου $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(Μον.5)

Β. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΟ=ΟΒ και ΑΔ=ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i. ΑΕ=ΒΖ συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AEO}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{BZO}}$.

ii. $\hat{A\Delta E} = \hat{B\Gamma Z}$.



(Μον.2x5=10)

Γ. Σε ένα κυκλικό δάσος με κέντρο Ο υπάρχει ένα ευθύγραμμο ποτάμι ΑΒ. Δύο γέφυρες έχουν τοποθετηθεί σε σημείο Γ και Δ του ποταμού, έτσι ώστε, ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:

i. οι γωνίες $O\hat{A}B$ και $O\hat{B}A$ είναι ίσες.

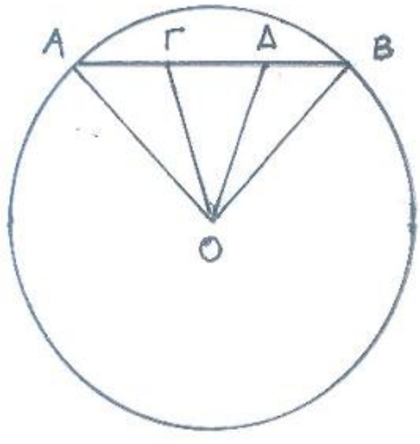
(Μον.3)

ii. τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{OA\Gamma}$ και $\overset{\Delta}{OB\Delta}$ είναι ίσα.

(Μον.3)

iii. η γωνία $O\hat{A}\Gamma$ είναι μικρότερη από τη γωνία $O\hat{\Gamma}A$.

(Μον.4)



<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, η διάμεσός του ΑΜ και ένα σημείο, έστω Δ, της διαμέσου. Προεκτείνουμε τη διάμεσο προς το μέρος του Μ κατά τμήμα ΜΕ=ΜΔ.

Α. Να σημειώσετε στο σχήμα τις πληροφορίες που προκύπτουν από την υπόθεση.

(Μον.5)

Β.i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{B\Delta M}$ και $\overset{\triangle}{M\Gamma E}$ είναι ίσα.
ii. Να γράψετε τα ίσα στοιχεία των δύο τριγώνων.

(Μον.2x5=10)

Γ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε τις καθέτους προς τη διάμεσο. Έστω Ζ και Η τα σημεία τομής αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΖ=ΓΗ και ΔΖ=ΗΕ.

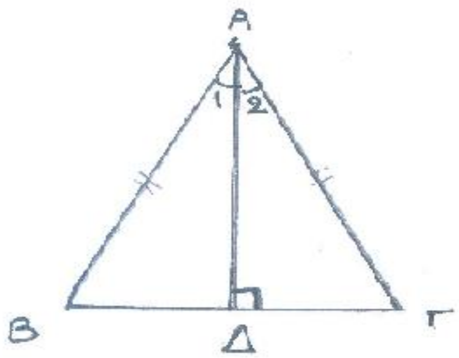
(Μον.10)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο:

Α.

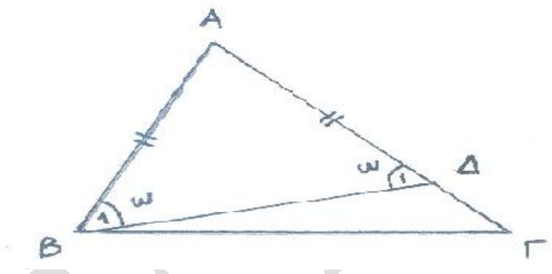


Έστω ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ΒΓ.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\mathrm{B}, \mathrm{A}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$:

$\left.\begin{array}{l} 1.\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}(\Upsilon) \\ 2.\mathrm{A\Delta}: \text{κοινή πλευρά} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα. Οπότε ΒΔ=ΔΓ, δηλαδή ΑΔ και διάμεσος. Επίσης $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{A}}_2$ άρα ΑΔ και διχοτόμος.

Β.



Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ με ΑΒ<ΑΓ δηλαδή, β>γ. Θα δείξουμε ότι $\hat{\mathrm{B}}>\hat{\Gamma}$.
Εφόσον β>γ, τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο της ΑΓ, έστω Δ τέτοιο ώστε ΑΒ=ΑΔ. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Delta}}$ είναι ισοσκελές άρα $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\Delta}_1=\hat{\omega}$.

Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$, είναι $\hat{\mathrm{B}}>\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\omega}$.

Επίσης, η $\hat{\Delta}_1=\hat{\omega}$ είναι εξωτερική για το τρίγωνο $\mathrm{B}\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma$, άρα $\hat{\Delta}_1=\hat{\omega}>\hat{\Gamma}$.

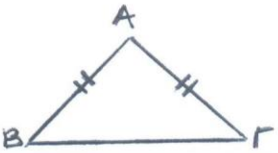
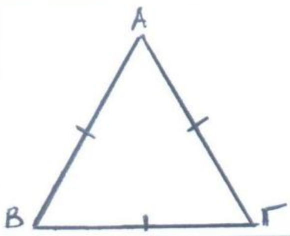
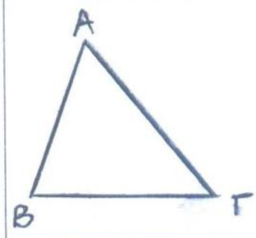
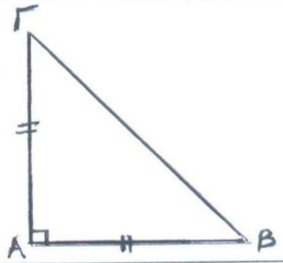
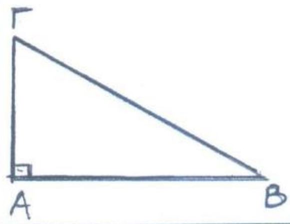
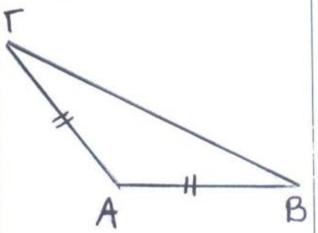
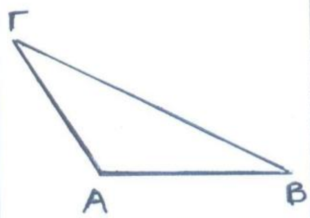
Άρα $\hat{\mathrm{B}}>\hat{\omega}$ και $\hat{\omega}>\hat{\Gamma}$ δηλ $\hat{\mathrm{B}}>\hat{\Gamma}$.

<u>Αντίστροφα</u>. Έστω $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$ με $\hat{\text{Β}} > \hat{\text{Γ}}$. Θα δείξουμε ότι $\beta > \gamma$. Έστω β≤γ. Τότε αν β<γ από το παραπάνω θα είχαμε $\hat{\text{Β}} < \hat{\text{Γ}}$ άτοπο. Επίσης αν β=γ τότε $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}}$ και πάλι άτοπο. Τελικά β>γ.

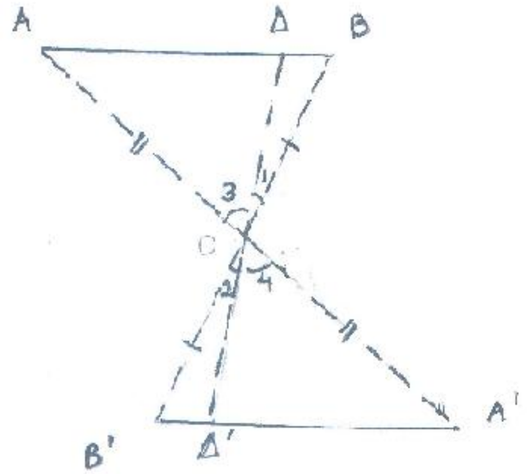
Γ.i.Λ **ii.Σ** **iii.Λ** **iv.Λ** **v.Σ** **vi.Σ**

<u>Θέμα 2^{ο}:</u>

Α.

Τρίγωνα	Ισοσκελές	Ισόπλευρο	Σκαληνό
Οξυγώνιο			
Ορθογώνιο		—	
Αμβλυγώνιο		—	

B.i.



Έστω ΑΒ ευθύγραμμο τμήμα και Ο ένα σημείο. Φέρουμε Α΄ το συμμετρικό του Α ως προς Ο και Β΄ το συμμετρικό του Β ως προς Ο. Τότε Α΄Β΄ θα είναι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς Ο. Έστω Δ ένα τυχαίο σημείο του ΑΒ. Φέρουμε το ΔΟ και προεκτείνουμε έως το Α΄Β΄. Θα δείξουμε ότι Δ΄ συμμετρικό του Δ ως προς το Ο, δηλ. ότι ΔΟ=ΟΔ΄.

Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{AOB}, \overset{\triangle}{A'OB'}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.AO = OA'(Y) \\ 2.BO = OB'(Y) \\ 3.\hat{O}_{1,3} = \hat{O}_{2,4}(\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Longrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, άρα $\hat{B} = \hat{B}'$.

Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{\Delta OB}, \overset{\triangle}{\Delta' OB'}$:

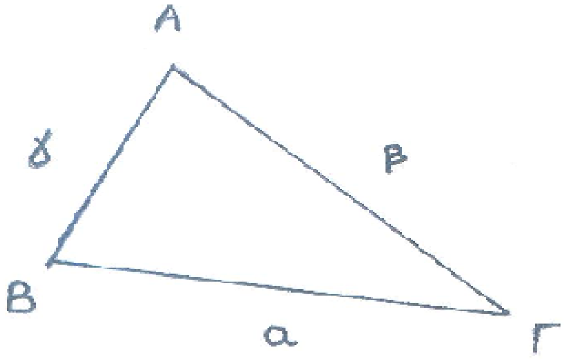
$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{B} = \hat{B}'(\text{προηγούμενη σύγκριση}) \\ 2.\hat{O}_1 = \hat{O}_2(\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.B'O = OB(Y) \end{array}\right\} \overset{\Gamma-\Pi-\Gamma}{\Longrightarrow}$$

Τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, άρα $\Delta O = O\Delta'$. Εφόσον δείξαμε για ένα τυχαίο σημείο Δ ότι το συμμετρικό του είναι το Δ΄ έπεται ότι Α΄Β΄ συμμετρικού του ΑΒ ως προς Ο.

ii.Από το **(i)** και την πρώτη σύγκριση εφόσον $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{A'OB'}$ έπεται ότι ΑΒ=Α΄Β΄.

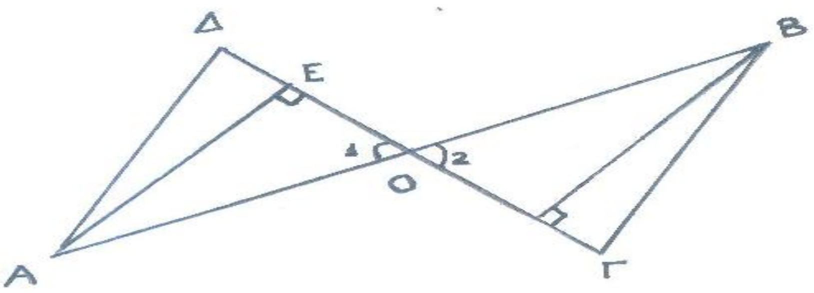
Θέμα 3^{ο}:

Α.



Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}}$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι: α<β+γ
Προσθέτοντας το α και στα δύο μέλη αυτής της ανισότητας έχουμε ότι:
α+α<α+β+γ δηλαδη,
2α<α+β+γ άρα
α<$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$
Επομένως α<τ, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

Β.



Υ	ΑΟ=ΟΒ ΑΔ=ΒΓ
Σ	i.ΑΕ=ΒΖ ii. $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε} = \text{Β}\hat{\Gamma}\text{Ζ}$

i.Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΟ}}, \overset{\triangle}{\text{ΒΖΟ}}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\text{ΑΟ} = \text{ΟΒ}(\text{Υ}) \\ 2.\hat{\text{Ο}}_1 = \hat{\text{Ο}}_2\,(\text{ως κατακορυφήν}) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

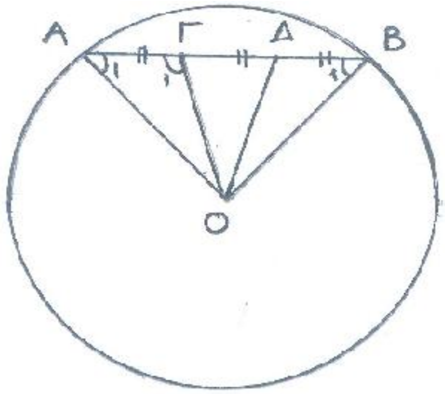
Εφόσον τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία ίσες μία προς μία, θα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, άρα ΑΕ=ΒΖ.

ii. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{AE\Delta}, \overset{\triangle}{BZ\Gamma}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.AE = BZ(i) \\ 2.A\Delta = B\Gamma(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Εφόσον τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, έπεται ότι είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, άρα $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Gamma}Z$.

Γ.



Υ	ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ
Σ	i. $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ii. $\overset{\triangle}{OA\Gamma} = \overset{\triangle}{OB\Delta}$ iii. $\hat{A}_1 < \hat{\Gamma}_1$

i. Εφόσον ΟΑ και ΟΒ ακτίνες του κύκλου, έπεται ότι είναι ίσες, άρα $\overset{\triangle}{AOB}$ ισοσκελές, άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$, δηλαδή $O\hat{A}B = O\hat{B}A$

ii. Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{OA\Gamma}, \overset{\triangle}{OB\Delta}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.A\Gamma = \Delta B(Y) \\ 2.\hat{A}_1 = \hat{B}_1(i) \\ 3.OA = OB(\text{ως ακτίνες του κύκλου}) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Longrightarrow}$$

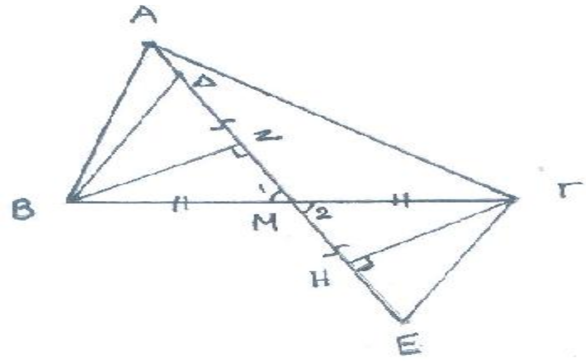
Τα τρίγωνα είναι ίσα.

iii. Είναι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ από το (i) ερώτημα. Επίσης, $\hat{\Gamma}_1$ εξωτερική στο $\overset{\triangle}{\Gamma OB}$ άρα $\hat{\Gamma}_1 > \hat{B}_1$**.**

Άρα $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{B}_1 < \hat{\Gamma}_1$ δηλαδή $\hat{A}_1 < \hat{\Gamma}_1$. Επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$.

<u>Θέμα 4^{o}:</u>

Α.



Υ	ΑΜ: διάμεσος ΔΜ=ΜΕ, $B Z \perp AM,\ \Gamma H \perp AM$
Σ	β. $\overset{\Delta}{B\Delta M} = \overset{\Delta}{M\Gamma E}$ Γ. ΒΖ=ΓΗ ΔΖ=ΗΕ

Β.i. Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{B\Delta M}, \overset{\Delta}{M\Gamma E}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\Delta M = ME(Y) \\ 2.\hat{M}_1 = \hat{M}_2 (\text{ως κατακορυφήν}) \\ 3.BM = M\Gamma(Y) \end{array}\right\} \overset{\Pi-\Gamma-\Pi}{\Longrightarrow} \text{Τα τρίγωνα είναι ίσα.}$$

ii. Από την ισότητα αυτή προκύπτουν:

ΒΔ=ΓΕ, $\Delta\hat{B}M = M\hat{\Gamma}E, B\hat{\Delta}M = \Gamma\hat{E}M$.

Γ. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{BZM}, \overset{\Delta}{\Gamma HM}$:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\hat{M}_1 = \hat{M}_2 (\text{ως κατακορυφήν}) \\ 2.BM = M\Gamma(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Τα ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία πλευρά και μία οξεία γωνία, ίσες μία προς μία, άρα είναι ίσα, άρα όλα τους τα στοιχεία ίσα, άρα **ΒΖ=ΓΗ**.
Επίσης ΜΖ=ΜΗ. Επίσης από υπόθεση: ΔΜ=ΜΕ

$$\text{άρα}\, \Delta M - MZ = ME - MH \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{\Delta Z = HE}$$