ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 26

Υλη:Κεφάλαια 7-8-9-10 **Β΄ Λυκείου**

Ον/μο:……………….. 11-1-15

ΘΕΜΑ Α

Α1.Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ τότε $\widehat{A} = 1\llcorner$ **(μον.10)**

Α2.Να κυκλώσετε το Σ ή το Λ στις προτάσεις:

1.Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα. Σ Λ

2.Σε τρίγωνο ΑΒΓ με εσωτερική διχοτόμο ΑΔ είναι $\Delta B = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ και $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$ Σ Λ

3.Δύο τρίγωνα που οι πλευρές του ενός είναι τριπλάσιες των πλευρών του άλλου, είναι όμοια. Σ Λ

4.Δύο όμοια τρίγωνα έχουν λόγο ομοιότητας 2**.**Τότε τα αντίστοιχα ύψη ,διχοτόμοι, διάμεσοι του ενός είναι διπλάσια του άλλου. Σ Λ

5.Δεν μπορούμε να μετρήσουμε με υποδεκάμετρο τμήμα μήκους $\sqrt{2}$ ούτε να το κατασκευάσουμε. Σ Λ

6.Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=10 και γ=7 το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. Σ Λ

7.Η δύναμη του Ο ως προς κύκλο (Ο,R) είναι αρνητική. Σ Λ

8.Το εμβαδό τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του. Σ Λ

9.Το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α είναι $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και το εμβαδό του $E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$**.** Σ Λ

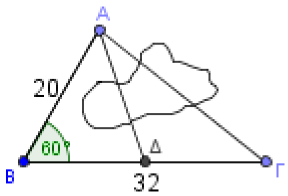
10.Μπορούμε να χωρίσουμε ένα τρίγωνο σε όσα ισοδύναμα τρίγωνα θέλουμε. Σ Λ

(μον.10)

Α3.Εστω τρίγωνο με πλευρές α, β, γ. Να βρείτε το είδος, ως προς τις γωνίες, του τριγώνου με πλευρές $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Β

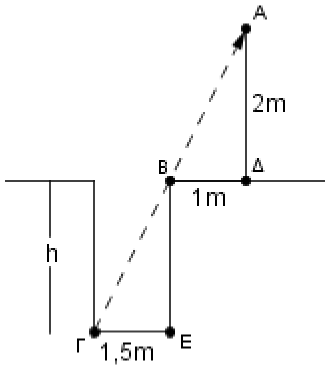
Β1. Στα σημεία Α και Γ σημειώνονται οι σταθμοί όπου είναι υποχρεωμένο να σταματά ένα τρένο. Μεταξύ αυτών εκτείνεται ένας ορεινός όγκος. Είναι συνεπώς αναγκαίο να διανοιχθεί ένα τούνελ. Για την τεχνοοικονομική μελέτη εντοπίστηκε στην πεδιάδα ένα σημείο Β τέτοιο, ώστε $A\hat{B}\Gamma = 60^o$ και υπολογίστηκαν οι αποστάσεις σε χιλιόμετρα ΑΒ=20km, ΒΓ=32km. Προτείνονται δύο λύσεις: Χάραξη της γραμμής ΑΓ με σχετικά μεγάλη υπόγεια διαδρομή, ή χάραξη κατά την τεθλασμένη ΑΔΓ με το Δ μέσον της ΒΓ, όπου η υπόγεια διαδρομή ελαχιστοποιείται. (Δίνεται ότι $\sqrt{336} = 18.3$)



1. Να βρείτε τις ολικές αποστάσεις ΑΓ (με το τούνελ) και ΑΔΓ. **(μον.8)**

2. Αν το κόστος κατασκευής της ΔΓ είναι 4000€/m και το κόστος της διαδρομής ΑΔ ή ΑΓ είναι 6000€/m να υπολογιστεί η ποιο συμφέρουσα από τις δύο λύσεις. **(μον.8)**

Β2. Για να μετρήσουμε το βάθος ενός πηγαδιού εργαζόμαστε ως εξής: Από το σημείο Α που απέχει 2 m από την επιφάνεια του εδάφους, βλέπουμε την άκρη Β του πηγαδιού να προβάλλεται στο σημείο Γ. Να βρείτε το βάθος h του πηγαδιού.



(μον.9)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε του επιπέδου για τα οποία είναι ΑΒ=6, ΑΓ=8, ΒΓ=10, ΓΔ=7, ΒΔ=17, ΒΕ=4 και ΔΕ=21.

1. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ε, Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά. **(μον.5)**

2. Υπολογίστε τα μήκη των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ. **(μον.5)**

Γ2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^o$, θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε της ΒΓ τέτοια ώστε ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να αποδείξετε ότι

$$A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 = \frac{2}{3}\alpha^2.$$ **(μον.5)**

Γ3. Σε κύκλο θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και στην προέκταση αυτής προς το Β σημείο Γ. Φέρουμε ακόμη ευθεία $Γx \perp ΑΓ$ και το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ. Αν η ΑΔ τέμνει τη Γx στο σημείο Ε, να αποδειχθεί ότι:

1. Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγράψιμμο. **(μον.5)**

2. Ισχύει $ΓΔ^2 = ΓΑ^2 - ΑΔ \cdot ΑΕ$. **(μον.5)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ η μια βάση είναι διπλάσια της άλλης.

1. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των δύο τραπεζίων, στα οποία το τραπέζιο χωρίζεται απ' τη διάμεσό του. **(μον.4)**

2. Αν Ε η τομή των διαγωνίων τότε**:**

α) $(ΑΒΕ)=\frac{1}{4}(ΓΔΕ)$ και **β)** $(ΑΔΕ)=\frac{1}{2}(ΓΔΕ)$ **(μον.4)**

Δ2. Αν η ευθεία της διαμέσου ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο (O,R) στο σημείο Δ, τότε:

1. ισχύει $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 2 \cdot ΑΔ \cdot ΑΜ$ **(μον.4)**

2. αν Ε η προβολή του Μ πάνω στην ΑΟ τότε

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 4R \cdot ΑΕ$ **(μον.5)**

Δ3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ η διάμεσός του. Από το Α φέρουμε ευθεία ε κάθετη στην ΑΔ. Από τα σημεία Β και Γ φέρουμε τις ΒΕ και ΓΖ αντίστοιχα κάθετες στην ε.

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ισοδύναμα. **(μον.4)**

2. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}(ΒΓΖΕ)$. **(μον.4)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. 1Σ, 2Σ, 3Σ, 4Σ, 5Λ, 6Σ, 7Σ, 8Σ, 9Λ, 10Σ

Α3. ●Εστω για παράδειγμα **α** η μεγαλύτερη πλευρά. Η τριγωνική ανισότητα $\alpha < \beta + \gamma$ γράφεται $\sqrt{\alpha}^2 < \sqrt{\beta}^2 + \sqrt{\gamma}^2$.Αρα το τρίγωνο με πλευρές $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ είναι οξυγώνιο.

●Αν α=β=γ τότε και $\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} = \sqrt{\gamma}$ οπότε τοτρίγωνο με πλευρές τις $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ είναι ισόπλευρο άρα οξυγώνιο.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

1.Από τον νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

$$A\Gamma^2 = 20^2 + 32^2 - 2 \cdot 20 \cdot 32 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o = 784 \Rightarrow A\Gamma = 28 \text{ km}$$

$$A\Delta^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o = 336 \Rightarrow A\Delta = 18.3 \text{ km}$$

Η διαδρομή ΑΔΓ είναι 16+18.3=34.3km

2.

Η διαδρομή ΑΓ έχει κόστος $28 \cdot 6000 \cdot 1000$=168.000.000€

Η διαδρομή ΑΔΓ έχει κόστος

$18,3 \cdot 6000 \cdot 1000 + 16 \cdot 4000 \cdot 1000$=173.800.000€

Η ποιο συμφέρουσα λύση λοιπόν είναι η διαδρομή ΑΓ.

Β2.Είναι: $A\Delta B \sim BE\Gamma$ με λόγο ομοιότητας 1.5 άρα h=BE=$2 \cdot 1{,}5$=3m

ΘΕΜΑ Γ

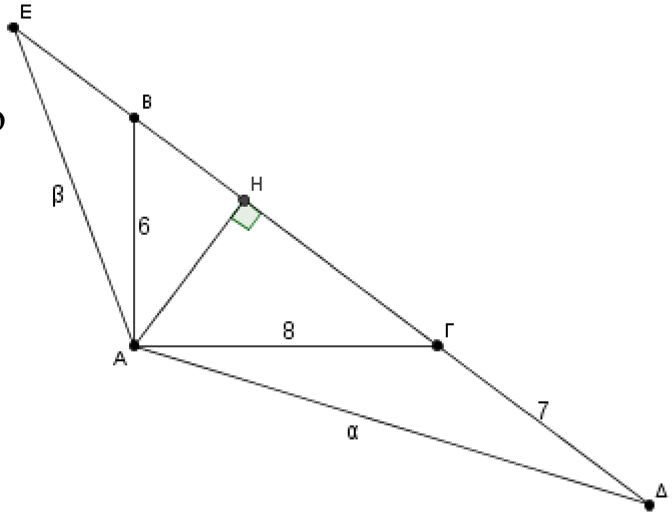
Γ1.

1.Είναι: $AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = B\Gamma^2 \Rightarrow B\hat{A}\Gamma = 90^o$ άρα το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ορθογώνιο.

Επειδή ΒΓ+ΓΔ=ΒΔ τα Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά

Επειδή ΔΒ+ΒΕ=ΔΕ τα Δ, Β, Ε είναι συνευθειακά.

Αρα Ε, Β, Γ, Δ συνευθειακά.



2. Είναι:

$$\Gamma A^2 = \Gamma B \cdot H\Gamma \Rightarrow 8^2 = 10 \cdot \Gamma H \Rightarrow \Gamma H = 6{,}4 \text{ άρα } BH=3{,}6$$

$$AH^2 = H\Gamma \cdot HB = 6{,}4 \cdot 3{,}6 \Rightarrow AH = 4{,}8$$

Είναι λοιπόν:

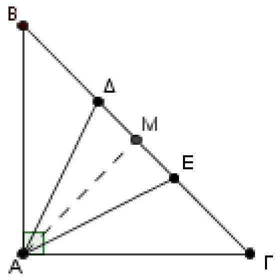
$$A\Delta^2 \underset{\Pi.\Theta.}{\overset{AH\Delta}{=\!=\!=}} AH^2 + H\Delta^2 = 4{,}8^2 + 13{,}8^2 \Rightarrow A\Delta = \sqrt{4{,}8^2 + 13{,}8^2}$$

$$AE^2 \underset{\Pi.\Theta.}{\overset{AHE}{=\!=\!=}} AH^2 + HE^2 = 4{,}8^2 + 7{,}6^2 \Rightarrow AE = \sqrt{4{,}8^2 + 7{,}6^2}$$

Γ2. Εχουμε: $A\Delta^2 + AE^2 + \Delta E^2 \underset{1^o\,\theta.\delta}{\overset{EA\Delta}{=\!=\!=}}$

$$= 2AM^2 + \frac{E\Delta^2}{2} + E\Delta^2 =$$

$$= 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2}{2} + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$$

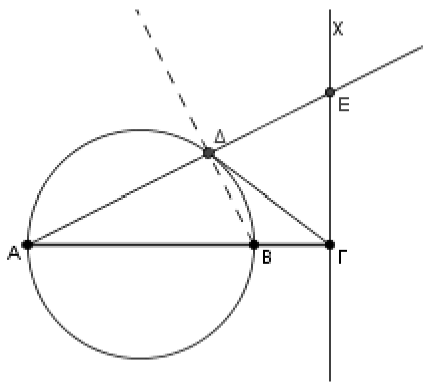


Γ3.

1. Επειδή $A\hat{\Delta}B = B\hat{\Gamma}E = 90^o \Rightarrow B\Gamma E\Delta$ εγγεγραμμένο

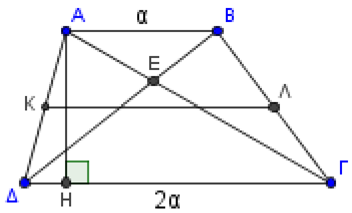
2. Είναι: $\Gamma A^2 - \Gamma\Delta^2 \underset{\varepsilon\varphi\alpha\pi.}{\overset{\Gamma\Delta}{=\!=\!=}} \Gamma A^2 - \Gamma B \cdot \Gamma A =$

$$= \Gamma A(\Gamma A - \Gamma B) = \Gamma A \cdot AB = AB \cdot A\Gamma \underset{\varepsilon\gamma\gamma.}{\overset{B\Gamma E\Delta}{=\!=\!=}} A\Delta \cdot AE$$



ΘΕΜΑ Δ

Δ1.



1. Είναι: $K\Lambda = \dfrac{2\alpha + \alpha}{2} = \dfrac{3\alpha}{2}$ και

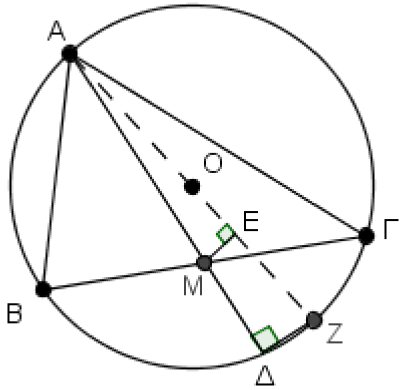
$$\frac{(AK\Lambda B)}{(K\Delta\Gamma\Lambda)} = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2} + \alpha\right) \cdot \cancel{A}\Theta}{\left(2\alpha + \frac{3\alpha}{2}\right) \cdot \cancel{\Theta}H} = \frac{5\alpha}{7\alpha} = \frac{5}{7}$$

2.

α)Είναι: $ΑΕΒτρ \sim ΔΕΓτρ$ με λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$ οπότε το τρίγωνο ΔΕΓ έχει διπλάσιο ύψος αντίστοιχα από το ύψος του τριγώνου ΑΕΒ. Αρα $\frac{(ΑΕΒ)}{(ΔΕΓ)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{\alpha} \cdot \cancel{\upsilon}_{\alpha}}{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot 2\cancel{\alpha} \cdot \cancel{\upsilon}_{2\alpha}} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$

β)Είναι: $\frac{(ΑΕΔ)}{(ΔΕΓ)} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot ΑΕ \cdot \cancel{\upsilon}_{ΑΕ}}{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot ΕΓ \cdot \cancel{\upsilon}_{ΕΓ}} = \frac{1}{2}$

Δ2.



1.Εχουμε: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \underset{1θ.δ.}{\overset{ΑΒΓ}{=\!=}} 2ΑΜ^2 + \frac{ΒΓ^2}{2} =$

$= 2ΑΜ^2 + \frac{(2ΒΜ)^2}{2} = 2ΑΜ^2 + 2ΒΜ^2 =$

$= 2(ΑΜ^2 + ΒΜ^2)$

Αρκεί να δείξω ότι:

$ΑΔ \cdot ΑΜ = ΑΜ^2 + ΒΜ^2 \Leftrightarrow (ΑΜ + ΜΔ) \cdot ΑΜ = ΑΜ^2 + ΒΜ^2 =$

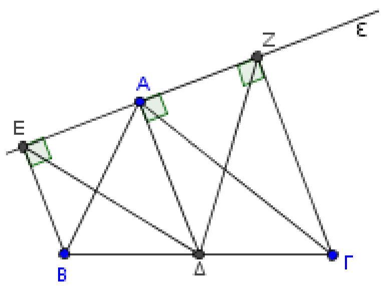
$\cancel{ΑΜ^2} + ΜΔ \cdot ΑΜ = \cancel{ΑΜ^2} + ΒΜ^2 \Leftrightarrow ΜΔ \cdot ΜΑ = ΜΒ \cdot ΜΓ$ που ισχύει.

2.Επειδή το ΜΔΖΕ είναι εγγράψιμο θα ισχύει:

$ΑΔ \cdot ΑΜ = ΑΖ \cdot ΑΕ \Leftrightarrow ΑΔ \cdot ΑΜ = 2R \cdot ΑΕ \Leftrightarrow 2ΑΔ \cdot ΑΜ = 4R \cdot ΑΕ$

και λόγω του α) ερωτήματος είναι $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = 4R \cdot ΑΕ$

Δ3.



1. ●(ΕΑΖ)=(ΑΒΔ)=$\frac{1}{2}$ ΑΔ· ΕΑ

●(ΖΑΔ)=(ΑΔΓ)= $\frac{1}{2}$ΑΔ·ΖΑ

Αρα (ΕΔΖ)=(ΑΒΓ)

2.(ΑΒΓ)=(ΕΔΖ)= $\frac{1}{2}$ΕΖ·ΑΔ=$\frac{1}{2}$(ΕΒΓΖ)