ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

23

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**
Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **15-12-18**

Θέμα 1ο:

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$ είναι η $f'(x)=2x$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. $\left[\eta\mu\left(x^2+1\right)\right]'=2x\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)$. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2-5}{x+7}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-7\}$. **Σ Λ**

iii. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. Η συνάρτηση $f(x)=x-2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+7x-4\right)'=$..................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=l_2$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=$............................ . **(2x3=6 μον.)**

<u>Θέμα 2ο</u>:

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-x^2}{x^3-3x^2+2x}$ **ii.** $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

(2x5=10μον.)

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ x^2-\dfrac{x}{2}, & x=1\end{cases}$.

i. Να βρείτε το $\lim_{x\to 1}f(x)$ και το $f(1)$. **(7 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. **(8 μον.)**

<u>Θέμα 3ο</u>:

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-\kappa x+2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Α. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. **(5 μον.)**

Β. Για κ=3 :

i. Να βρείτε το $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(15 μον.)**

iii. Να βρείτε την εξίσωσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2,f(2))$. **(5 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x(t)=t^3-6t^2+9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i. Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t. **(3 μον.)**

ii. Να βρεθεί η επιτάχυνση του σημείου σε χρόνο t. **(3 μον.)**

iii. Πότε το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο; **(3 μον.)**

iv. Πότε το σώμα κινείται στη θετική και πότε στην αρνητική κατεύθυνση; **(3 μον.)**

v. Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5s. **(3 μον.)**

Β. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό $100m^2$ ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο; **(10 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Β. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0{}^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0{}^2+2x_0h+h^2-x_0{}^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

Δ. i. Σ **ii.** Σ **iii.** Λ **iii.** Λ

Ε. i. $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-4\right)'=x^2-5x+7$.

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=l_1+l_2$.

Θέμα 2^{o}:

Α.i.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-x^2}{x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{x(x^2-3x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{x(x-1)(x-2)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x-2)}=1.$$

ii.

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{(x-5)}=$$

$$\lim_{x\to 5}x\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)=10\sqrt{5}.$$

B. Έχουμε την $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ x^2-\dfrac{x}{2}, & x=1\end{cases}$.

i.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

και $f(1)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

ii. Εφόσον, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\kappa x+2\ ,x\in\mathbb{R}$.

Για να τέμνει η f(x) τον άξονα $x'x$ στο 1 πρέπει:

$f(1)=0 \Leftrightarrow 1-\kappa+2=0 \Leftrightarrow \kappa=3$.

Β. Για κ=3 έχουμε $f(x)=x^3-3x+2$.

i.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{x^3-x-2x+2}{x^2-1}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x\left(x^2-1\right)-2(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2+x-2\right)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

ii. → Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-3$.

→ Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm1$.

→ Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
f'	+	0	-	0	+	
f	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το $f(-1)=-1+3+2=4$ και τοπικό ελάχιστο για x=1 το $f(1)=1-3+2=0$.

iii. Είναι: $f(2)=8-6+2=4$ και $f'(2)=12-3=9$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(2,f(2))$ είναι:

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-4=9(x-2) \Leftrightarrow$

$y=9x-18+4 \Leftrightarrow y=9x-14.$

Θέμα 4^o:

Α. i. Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t είναι:

$$u(t)=x'(t)=\left(t^3-6t^2+9t\right)'=3t^2-12t+9\ .$$

ii. Η επιτάχυνση του σημείου σε χρόνο t είναι:

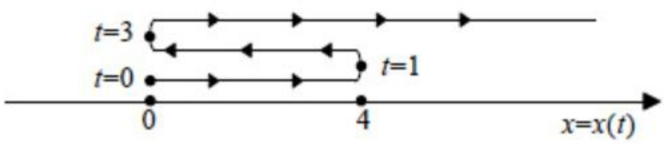
$$\alpha(t)=u'(t)=x''(t)=\left(3t^2-12t+9\right)'=6t-12\ .$$

iii. Το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο όταν:

$$u(t)=0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9=0\overset{:3}{\Leftrightarrow}t^2-4t+3=0\Leftrightarrow t=1\text{s ή } t=3\text{s}.$$

iv. Το σώμα κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση όταν:
$u(t)>0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9>0\Leftrightarrow t<1\text{s ή } t>3\text{s}$ και κατά την αρνητική κατεύθυνση όταν: $u(t)<0\Leftrightarrow 3t^2-12t+9<0\Leftrightarrow 1<t<3$.

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου παριστάνεται ως εξής:



v. Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

∗ Στη διάρκεια του πρώτου δευτερολέπτου:
$S_1=\left|x(1)-x(0)\right|=\left|4-0\right|=4\text{m}$.

∗ Από t=1 μέχρι t=3 είναι: $S_2=\left|x(3)-x(1)\right|=\left|0-4\right|=4\text{m}$.

∗ Από t=3 μέχρι t=5 είναι: $S_3=\left|x(5)-x(3)\right|=\left|20-0\right|=20\text{m}$.

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5s είναι: $S=S_1+S_2+S_3=4+4+20=28\text{m}$.

Β.Έστω ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x,y και εμβαδό 100m^2. Τότε, θα είναι $x\cdot y=100\Leftrightarrow y=\dfrac{100}{x}$. Η περίμετρος του ορθογωνίου θα είναι,

Π=2x+2y δηλαδή, $\Pi(x)=2x+\dfrac{200}{x}$ με x>0.

∗ Η Π(x) είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων με:

$$\Pi'(x)=\left(2x+\frac{200}{x}\right)'=2-\frac{200}{x^2}.$$

∗ Λύνουμε την εξίσωση: $\Pi'(x)=0\Leftrightarrow 2=\dfrac{200}{x^2}\Leftrightarrow x^2=100\Leftrightarrow x=10.$

$*$ Ο πίνακας προσήμων της $\Pi'(x)$ είναι:

x	0	10	$+\infty$
Π'	-		+
Π	↘		↗

Σύμφωνα με τον πίνακα το ζητούμενο ορθογώνιο είναι το τετράγωνο με πλευρά 10.