ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

22

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Όλη η ύλη **18-05-18**

Θέμα 1ο:

Α. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα ενός δείγματος; **(7 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι ίση με $(x)'=1$. **(8 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε f(2017)<f(2018). **Σ Λ**

ii. $(\varepsilon\varphi x)'=-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. **Σ Λ**

iii. Ο συντελεστής μεταβολής είναι ένα μέτρο απόλυτης διασποράς. **Σ Λ**

iv. Το κέντρο κάθε κλάσης ισούται με το ημιάθροισμα των άκρων της κλάσης. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Δ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=$ ....

ii. $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=$ ....

iii. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμούς της όταν ………………… .

(3x2=6 μον.)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

<u>Θέμα 2ο</u>:

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.

Α. i. Να υπολογίσετε την τιμή f(3). **(3 μον.)**

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)(x-3)}{x^2-9}$. **(5 μον.)**

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$ και α θετικός αριθμός.

i. Να υπολογίσετε τον τύπο της f' . **(4 μον.)**

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να εντοπίσετε τις θέσεις και το είδος των ακρότατων της. **(6 μον.)**

iii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,2) , να αποδείξετε ότι α=4 και να υπολογίσετε το τοπικό ελάχιστο της f. **(3 μον.)**

Γ. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$. **(2 μον.)**

ii. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^3-x^2-7x+6}$. **(2 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 3^o:

Τα ετήσια εισοδήματα (σε χιλιάδες ευρώ) 40 νοικοκυριών κατά το έτος 2017, έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους c=10, όπως στον παρακάτω πίνακα:

Ετήσιο εισόδημα $[-)$	Κέντρο κλάσης $\mathbf{x_i}$	Αριθμός Νοικοκυριών $\mathbf{\nu_i}$	Αθροιστική Συχνότητα $\mathbf{N_i}$	Σχετική Συχνότητα $\mathbf{f_i\%}$	$\mathbf{x_i\nu_i}$
$[5,15)$					
$[15,...)$			25		
$[...,...)$				15	
$[...,...)$					
$[...,...)$					
Σύνολο	-		-		

Α. Αν η συχνότητα ν_2 της δεύτερης κλάσης είναι πενταπλάσια της ν_4 της τέταρτης κλάσης και η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην τέταρτη κλάση είναι $\omega_4=36^o$, να αποδείξετε ότι:
$\nu_1=5$, $\nu_2=20$, $\nu_3=6$ και $\nu_4=4$. **(4 μον.)**

Β. Για $\nu_1=5$, $\nu_2=20$, $\nu_3=6$ και $\nu_4=4$
i. Να συμπληρώσετε τον πίνακα. **(4 μον.)**
ii. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των ετήσιων εισοδημάτων των νοικοκυριών και την τυπική απόκλιση. **(4 μον.)**

Γ. i. Σε πόσα νοικοκυριά το εισόδημα ήταν το πολύ 20.000€; **(4 μον.)**
ii. Ποιο είναι το ποσοστό των νοικοκυριών με ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 35.000€; **(4 μον.)**

Δ. Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής των 25.000€. **(5 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4^o:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + x + \beta,\ x \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1) και επιπλέον ισχύει ότι:
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι α=2 και β=1. **(6 μον.)**

Β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x. **(6 μον.)**

Γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$. **(6 μον.)**

Δ. Έστω $f'(-1),\ f'(0),\ f'(1),\ f'(2)$ οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μιας μεταβλητής Χ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(7 μον.)**

Δίνεται: $s^2 = \dfrac{1}{\nu}\left\{\Sigma t_i^2 - \dfrac{(\Sigma t_i)^2}{\nu}\right\}$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Η αθροιστική συχνότητα (N_i) εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής (x_i).

Β. Είναι: $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h}=1.$

Γ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iii.** Σ

Δ. i. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

ii. $f_1+f_2+...+f_\kappa=1$.

iii. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμούς της όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Θέμα 2ο:

Α. i. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι και στο $x_0=3$, οπότε $f(3)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

ii. Είναι: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)(x-3)}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{(x+3)}=\dfrac{1}{3}.$

Β. i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως ρητή πολυωνυμική με:

$$f'(x)=\left(\frac{\alpha x}{x^2+1}\right)'=\frac{(\alpha x)'(x^2+1)-\alpha x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$$

$$\frac{\alpha(x^2+1)-\alpha x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{\alpha x^2+\alpha-2\alpha x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-\alpha x^2+\alpha}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}.$$

ii. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{-\alpha x^2+\alpha}{(x^2+1)^2}=0\Leftrightarrow-\alpha x^2+\alpha=0\Leftrightarrow-\alpha x^2=-\alpha\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
f'	- 0	+ 0	-
f	↘	↗	↘

Η f είναι γν. φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι γν. αύξουσα στο $[-1,1]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x=-1 και τοπικό μέγιστο για x=1.

ii. Εφόσον η C_f διέρχεται από το Α(1,2) θα είναι:

$f(1)=2 \Leftrightarrow \frac{\alpha\cdot 1}{1^2+1}=2 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}=2 \Leftrightarrow \alpha=4$. Για α=4 η f γίνεται:

$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, οπότε το τοπικό ελάχιστο της f είναι το

$$f(-1)=\frac{4\cdot(-1)}{(-1)^2+1}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Γ.i.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x^2+5}-3\right)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2-4)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2+5-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x^2-4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{2^2+5}+3}{4\cdot\left(\sqrt{2+2}+2\right)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}.$$

ii.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^3-x^2-7x+6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{Horner}}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x^2+x-6)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(2x^2+x-6)}=\frac{1+1}{2+1-6}=-\frac{2}{3}.$$

Θέμα 3ο:

Α. Επειδή η συχνότητα ν_2 της δεύτερης κλάσης είναι πενταπλάσια της συχνότητας ν_4 της τέταρτης κλάσης θα είναι $\nu_2=5\nu_4$. Όμως,

$\omega_4 = 36^\circ \Leftrightarrow 360^\circ \cdot f_4 = 36^\circ \Leftrightarrow \frac{\nu_4}{40} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \nu_4 = 4$. Οπότε $\nu_2=20$.

Επίσης, $N_2 = 25 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 = 25 \Leftrightarrow \nu_1 = 5$ και

$f_3 = 0{,}15 \Leftrightarrow \frac{\nu_3}{40} = 0{,}15 \Leftrightarrow \nu_3 = 6$.

Β.i.

$[-)$	x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$x_i\nu_i$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i$
$[5,15)$	10	5	5	12,5	50	256	1280
$[15,25)$	20	20	25	50	400	36	720
$[25,35)$	30	6	31	15	180	16	96
$[35,45)$	40	4	35	10	160	196	784
$[45,55)$	50	5	40	12,5	250	576	2880
Σύνολο	-	40	-	100	1040	-	5760

Όπου $\nu_5 = 40 - (5+20+6+4) = 5$ και $N_1 = \nu_1$, $N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$.

ii. Η μέση τιμή είναι: $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \nu_i}{\nu} = \frac{1040}{40} = 26$ και η διακύμανση είναι:

$s^2 = \frac{\Sigma\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \nu_i}{\nu} = \frac{5760}{40} = 144$. Επομένως, η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{144} = 12$.

Γ.i. Τα νοικοκυριά στα οποία το εισόδημα ήταν το πολύ 20.000€ είναι:

$\nu_1 + \frac{\nu_2}{2} = 5 + 10 = 15$.

ii. Το ποσοστό των νοικοκυριών με ετήσιο εισόδημα τουλάχιστον 35.000€ είναι: $f_4\% + f_5\% = 10\% + 12{,}5\% = 22{,}5\%$.

Δ. Η ζητούμενη μέση τιμή είναι:

$\bar{y} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{50+400}{25} = \frac{450}{25} = 18$ χιλιάδες ευρώ.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4ο:

Α. Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το Α(1,1) είναι $f(1)=1 \Leftrightarrow 1-\alpha+1+\beta=1 \Leftrightarrow \beta=\alpha-1$ **(1)**. Επίσης, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ δηλαδή $f'(1)=0$ **(2)**. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-2\alpha x+1$. Οπότε, η **(2)**$\Rightarrow 3-2\alpha+1=0 \Leftrightarrow -2\alpha=-4 \Leftrightarrow$ **α=2**. Τότε η **(1)**$\Rightarrow$ **β=1**.

Β. Για α=2 και β=1 είναι $f(x)=x^3-2x^2+x+1$ και $f'(x)=3x^2-4x+1$.
Για το ελάχιστο του ρυθμού μεταβολής της f θα βρούμε την f''.
Είναι: $f''(x)=6x-4$. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

. Τότε ο πίνακας προσήμων της f'' είναι:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f''	-	0	+
f'	↘		↗

Η ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f είναι:

$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+1=\frac{4}{3}-\frac{8}{3}+\frac{3}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Γ. Έστω $M(\omega,f(\omega))$ το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. Τότε:
$f'(\omega)=0 \Leftrightarrow 3\omega^2-4\omega+1=0$, $\Delta=16-12=4>0$ οπότε η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις: $\omega_{1,2}=\dfrac{4\pm 2}{6}=\begin{cases}\dfrac{6}{6}=1\\ \dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$. Για τις εξισώσεις των εφαπτόμενων έχουμε: $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=0$ και

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{1-6+9+27}{27}=\frac{31}{27}.$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Οπότε: $\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ και

$$\varepsilon_2 : y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow y - \frac{31}{27} = 0 \Rightarrow y = \frac{31}{27}.$$

Δ. Έχουμε: $f'(-1) = 3 + 4 + 1 = 8$

$f'(0) = 1$

$f'(1) = 0$

$f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5$

Η μέση τιμή του δείγματος είναι: $\bar{x} = \frac{8+1+0+5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\Sigma t_i^2 - \frac{(\Sigma t_i)^2}{\nu}\right\} = \frac{\Sigma t_i^2}{\nu} - (\bar{x})^2 = \frac{1+64+25+0}{4} - \frac{49}{4} =$$

$$\frac{90}{4} - \frac{49}{4} = \frac{41}{4}.$$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{41}{4}} = \frac{\sqrt{41}}{2}$ και

ο συντελεστής μεταβολής $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{41}}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{41}}{7}$.

Έστω $CV \le 10\% \Leftrightarrow \frac{\sqrt{41}}{7} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{41}}{7}\right)^2 \le \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{41}{49} \le \frac{1}{100} \Leftrightarrow$

$4100 \le 49$ άτοπο. Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.