ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

21

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Όλη η ύλη **10-02-18**

Θέμα 1ο:

Α. Τι εκφράζουν τα μέτρα θέσης, τι τα μέτρα διασποράς και ποια είναι;(αναφορικά) **(5 μον.)**

Β. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$ είναι ίση με $\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το εύρος ισούται με τη διαφορά της μέγιστης από την ελάχιστη παρατήρηση. **Σ Λ**

ii. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+1}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

iii. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης που δεν επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $(\varepsilon\varphi x)'=$..................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ τότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=$............................. .

iii. $\bar{x}=$............................ . **(3x2=6 μον.)**

Θέμα 2°:

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

4, κ , 5, 6, 2κ+1, 4, 6, κ+2, 6, 4

όπου $\kappa = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Α. Να αποδείξετε ότι κ=3. **(5μον.)**

Β. Για κ=3:

i. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή. **(4μον.)**

ii. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή. **(3μον.)**

iii. Να υπολογίσετε τη διακύμανση των βαθμών του μαθητή. **(5μον.)**

iv. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(5μον.)**

v. Αν ο φοιτητής έγραφε 2 μονάδες περισσότερο σε κάθε μάθημα, να εξετάσετε ένα το καινούριο δείγμα θα είναι ομοιογενές. **(3 μον.)**

Θέμα 3°:

Α. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , x \in [1,2) \cup (2, +\infty) \\ \dfrac{3\kappa}{8} + 1 & , x = 2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο σημείο x_0=2. **(4 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ όπου α είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει $2f''(x) + f'(x) + 21 = 3x^2 + 6x,\ x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε την παράγωγο της f. **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f. **(3 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι α=-9. **(4 μον.)**

iv. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(5 μον.)**

v. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(2017)$ και $f(2018)$. **(2 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4ο:

Α. Σε ένα διαγωνισμό το 50% των μαθητών έγραψαν πάνω από 10, ενώ το 2,5% των μαθητών έγραψαν κάτω από 4. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των βαθμών είναι περίπου κανονική.

i. Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 10$ και s=3. **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν πάνω από 10 αλλά κάτω από 16. **(3 μον.)**

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν το πολύ 13. **(3 μον.)**

Β. Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι απουσίες που έκαναν 40 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου .Αν γνωρίζουμε ότι :

$[-)$	ν_i
$[0,25)$	ν_1
$[25,50)$	ν_2
$[50,75)$	ν_3
$[75,100)$	ν_4

- Το ν_1 ισούται με την κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (x^2-2)^4$ στο $x_0 = -1$
- $\nu_2 = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-9x}{x^2-5x+6}$ και
- Το ν_3 ισούται με το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 - 8x + 18$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι ν_1=8, ν_2=18, ν_3=10 και ν_4=4. **(4 μον.)**

ii. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη διάμεσο. **(4 μον.)**

iii. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του δείγματος. **(5 μον.)**

iv. Να βρείτε τον αριθμό των μαθητών που έκαναν από 60 έως 75 απουσίες , αν θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα . **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Τα μέτρα θέσης εκφράζουν τη θέση του κέντρου των παρατηρήσεων, ενώ τα μέτρα διασποράς εκφράζουν το πόσο εκτείνονται οι παρατηρήσεις γύρω από το κέντρο τους.

Μέτρα θέσης είναι τα :

- Μέση τιμή $(\bar{x})$
- Σταθμικός μέσος $(\bar{x}_w)$
- Διάμεσος (δ)

Μέτρα διασποράς είναι τα :

- Εύρος (R)
- Διακύμανση (s^2)
- Τυπική απόκλιση (s)
- Συντελεστή μεταβολής (CV) (σχετικής διασποράς ή ασυμμετρίας)

Β. Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$.

Τότε $F'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}\right]=$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]\overset{f,g\ \text{παραγωγίσιμες}}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]+\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]=$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=l_1+l_2$.

iii. $\bar{x}=\dfrac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 2ο:

Α. Είναι:

$$\kappa=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=1+2=3$$

Β. Για κ=3 οι βαθμοί του φοιτητή είναι: 4, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 5, 6, 4.

i. Η μέση τιμή των βαθμών του μαθητή είναι:

$$\bar{x}=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}=\frac{4+3+5+6+7+4+6+5+6+4}{10}=\frac{50}{10}=5\ .$$

ii. Για τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή διατάσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και εφόσον ν=10 (άρτιος) η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

Οπότε, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7 και $\delta=\frac{5+5}{2}=5$.

iii. Για τη διακύμανση των βαθμών του μαθητή έχουμε:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}{10}=$$

$$\frac{(3-5)^2+3\cdot(4-5)^2+2\cdot(5-5)^2+3\cdot(6-5)^2+(7-5)^2}{10}=$$

$$\frac{4+3\cdot 1+2\cdot 0+3\cdot 1+4}{10}=\frac{4+3+3+4}{10}=\frac{14}{10}=1{,}4.$$

iv. Για να εξετάσουμε αν το δείγμα είναι ομοιογενές θα βρούμε το συντελεστή μεταβολής του δείγματος. Η τυπική απόκλιση είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{1{,}4}$. Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{\sqrt{1{,}4}}{5}$. Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Τότε:

$$CV\le 10\%\Rightarrow\frac{\sqrt{1{,}4}}{5}\le\frac{1}{10}\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{1{,}4}}{5}\right)^2\le\left(\frac{1}{10}\right)^2\Rightarrow\frac{1{,}4}{25}\le\frac{1}{100}\Rightarrow$$

$140\le 25$ άτοπο.

Οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

v. Αν ο φοιτητής έγραφε 2 μονάδες περισσότερο σε κάθε μάθημα, τότε το νέο δείγμα θα είχε $\bar{y}=\bar{x}+2=5+2=7$ και $s_y=s_x=\sqrt{1{,}4}$.

Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές. Τότε:

$$CV \le 10\% \Rightarrow \frac{\sqrt{1,4}}{7} \le \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{1,4}}{7}\right)^2 \le \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Rightarrow \frac{1,4}{49} \le \frac{1}{100} \Rightarrow$$

$140 \le 49$ άτοπο.

Επομένως, ούτε το καινούριο δείγμα θα είναι ομοιογενές.

Θέμα 3^{o}:

Α. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} & , x \in [1,2) \cup (2,+\infty) \\ \dfrac{3\kappa}{8}+1 & , x = 2 \end{cases}$.

i.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(1-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1-\left(\sqrt{x-1}\right)^2}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{1-x+1}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x+2)\left(1+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{-1}{4\cdot 2} = -\frac{1}{8}.$$

ii. Για να είναι η f συνεχής στο σημείο x_0=2 θα πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -\frac{1}{8} = \frac{3\kappa}{8}+1 \Leftrightarrow -1 = 3\kappa+8 \Leftrightarrow 3\kappa = -9 \Leftrightarrow$$

$\kappa = -3.$

Β. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1,\ x \in \mathbb{R}$

i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + \alpha x + 1)' = 3x^2 - 6x + \alpha$.

ii. Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$f''(x) = (f'(x))' = (3x^2 - 6x + \alpha)' = 6x - 6$

iii. Από την εκφώνηση έχουμε:

$2f''(x) + f'(x) + 21 = 3x^2 + 6x \Leftrightarrow$

$2(6x - 6) + 3x^2 - 6x + \alpha + 21 = 3x^2 + 6x \Leftrightarrow$

$12x - 12 + 3x^2 - 6x + \alpha + 21 - 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -9.$

iv. Για α=-9 είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Βρίσκουμε τις ρίζες της f'.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$.

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
f'	+	0	-	0	+	
f	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 3]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$ και τοπικό ελάχιστο για x=3 το $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$.

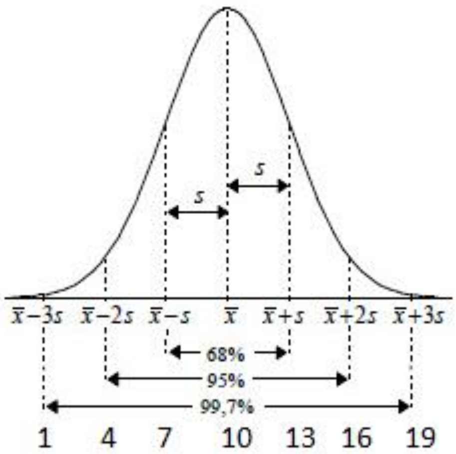
v. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$ και οι αριθμοί 2017 και 2018 βρίσκονται σ αυτό το διάστημα, οπότε εφόσον 2017<2018 θα είναι $f(2017) < f(2018)$.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Θέμα 4^o:

Α. Σε ένα διαγωνισμό το 50% των μαθητών έγραψαν πάνω από 10, ενώ το 2,5% των μαθητών έγραψαν κάτω από 4. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των βαθμών είναι περίπου κανονική.

i. Εφόσον έχουμε κανονική κατανομή και το 50% των μαθητών έγραψαν πάνω από 10 θα είναι $\bar{x} = 10$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $2,5\% = \frac{100\% - 95\%}{2}$ και γνωρίσουμε ότι το 2,5% έγραψε κάτω από 4, οπότε $\bar{x} - 2s = 4 \Leftrightarrow 10 - 2s = 4 \Leftrightarrow 2s = 6 \Leftrightarrow s = 3$.



ii. Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν πάνω από 10 αλλά κάτω από 16 είναι: $\frac{95\%}{2} = 47,5\%$.

iii. Το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν το πολύ 13 είναι:

$$50\% + \frac{68\%}{2} = 50\% + 34\% = 84\% .$$

Β.i. ● Είναι $f'(x) = \left[(x^2-2)^4\right]' = 4(x^2-2)^3(x^2-2)' = 8x(x^2-2)^3$

οπότε $v_1 = f'(-1) = 8(-1)\left[(-1)^2 - 2\right]^3 = (-8)(-1) \Rightarrow \boxed{v_1 = 8}$

● Επίσης $v_2 = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-9x}{x^2-5x+6} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x^2-9)}{(x-3)(x-2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 3}\frac{x(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = 18$ άρα $\boxed{v_2 = 18}$

- Η $g(x)=2x^2-8x+18$ έχει $g'(x)=4x-8$ και αν $g'(x)\geq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow 4x-8\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.Από τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$ 2	$+\infty$
f '	-	+
f	↘	↗

προκύπτει ότι η g έχει ελάχιστο το g(2)=10 .Άρα $\boxed{\nu_3=10}$

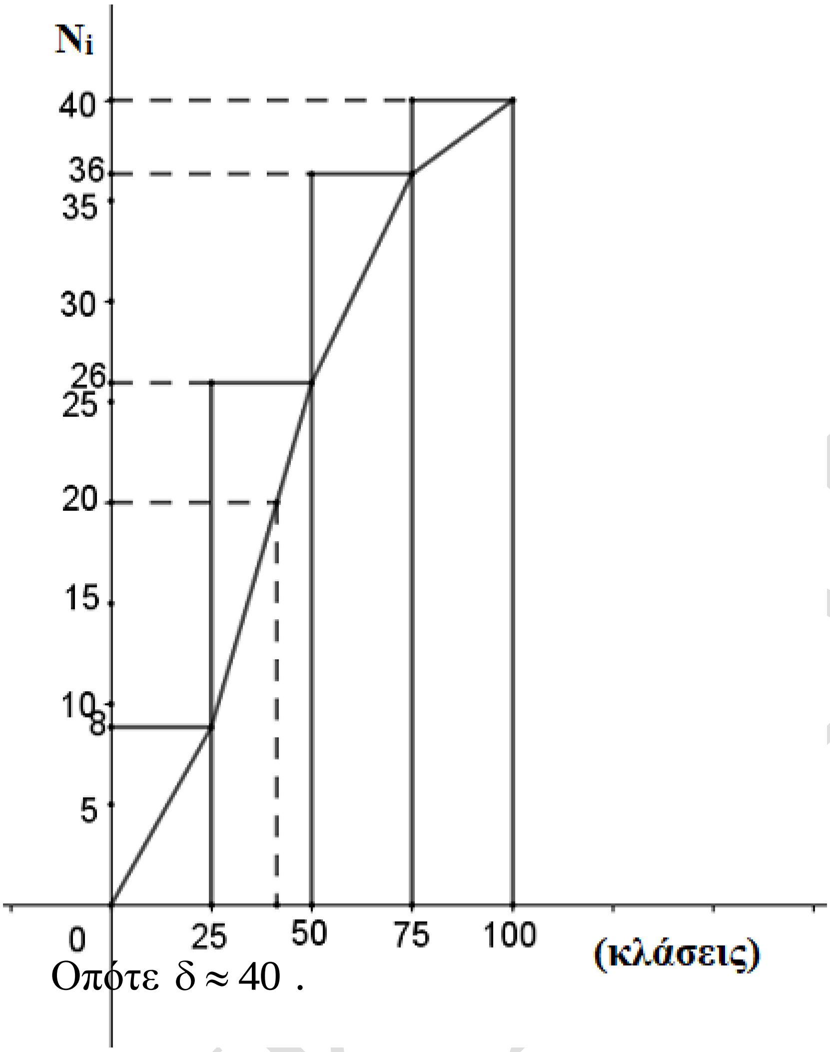
- Είναι $v_1+v_2+v_3+v_4=40$ οπότε $\boxed{\nu_4=4}$

ii. Με βάση τους αντίστοιχους τύπους προκύπτει ο πίνακας .

$[-)$	**x_i**	**v_i**	**N_i**	**x_iv_i**
$[0,25)$	12,5	8	8	100
$[25,50)$	37,5	18	26	675
$[50,75)$	62,5	10	36	625
$[75,100)$	87,5	4	40	350
Σύνολο	-	40	-	1.750

Το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων είναι:

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ



Οπότε $\delta \approx 40$.

iii. Η μέση τιμή του δείγματος είναι: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i \nu_i}{\nu} = \frac{1750}{40} = 43,75$.

iv. Οι μαθητές με απουσίες από 60 έως 75 βρίσκονται στην κλάση $[50,75)$ και το πλήθος τους είναι : $\frac{75-60}{75-50} \cdot 10 = 6$