ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

20

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός, Στατιστική **09-12-17**

<u>Θέμα 1^{o}</u>:

Α. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές; (αναλυτικά) **(5 μον.)**

Β. Τι είναι το κυκλικό διάγραμμα και πότε χρησιμοποιείται; **(5 μον.)**

Γ. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X και $f_1, f_2, ..., f_\kappa$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των προηγούμενων τιμών .Να αποδείξετε ότι : **i.** $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$.

ii. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$.

(5 μον.)

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{x + 7}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R} - \{-7\}$. **Σ Λ**

iii. $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f(x) \cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. Το εμβαδό που δημιουργείται από το πολύγωνο συχνοτήτων μιας συνεχούς μεταβλητής και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 7x - 4\right)' = ... $.

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ τότε

$\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = ... $.

iii. $\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = ...$. **(3x2=6 μον.)**

Θέμα 2ο:

Α. Οι επιδόσεις 50 υποψηφίων για την εγγραφή τους σε μία ιδιωτική σχολή ήταν: 6,7,8,9,5,1,4,7,3,9, 2,5,3,8,6,7,7,6,8,1, 3,0,1,4,9,0,9,8, 7,6,1,2,3,4,5,4,6,6,4,3,2,8,8,7,7,6,5,5,9,2

i. Κατασκευάστε πίνακα με $\nu_i, N_i, f_i\%, F_i\%$. **(5μον.)**

ii. Να βρείτε τους μαθητές και το ποσοστό των μαθητών που έγραψαν: **α.** το πολύ 5.
β. κάτω από 5.
γ. τουλάχιστον 5. **(3x2=6μον.)**

iii. Η σχολή αποφάσισε να πάρει το 36% των υποψηφίων. Τι βαθμό πρέπει να έχει γράψει κάποιος για να εγγραφεί; **(3μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1\\ x^2-\dfrac{x}{2}, & x=1\end{cases}$.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ και το $f(1)$. **(6μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. **(5μον.)**

Θέμα 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3-\kappa x+2$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Α. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. **(3 μον.)**

Β. Για κ=3 :

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$. **(7 μον.)**

ii. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(10 μον.)**

iii. Να βρείτε την εξίσωσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2,f(2))$. **(5 μον.)**

Θέμα 4ο:

Έστω ότι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσους πλάτους με κεντρικές τιμές $x_1 = 2, \quad x_2 = 6$, $x_3 = 10, \quad x_4 = 14$ και $x_5 = 18$. Γνωρίζουμε ότι : Η συχνότητα της 4ης κλάσης είναι διπλάσια της 1ης κλάσης .Η συχνότητα της 2ης κλάσης είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $g(x) = x^2 + 5$.

Επίσης , η συχνότητα της 3ης κλάσης είναι το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 2x}$ και η συχνότητα της 5ης κλάσης είναι 2. Τέλος το μέγεθος του πληθυσμού είναι ν=20 .

Α. Να βρεθεί το πλάτος c των κλάσεων . **(3 μον.)**

Β. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων. **(7 μον.)**

Γ. Θεωρώντας ότι η μεταβλητή Χ παριστάνει ημέρες άδειας για 20 άτομα μιας εταιρείας να βρείτε :

i. Πόσα άτομα πήραν άδεια το πολύ 12 ημέρες ;

ii. Ποιό ποσοστό των ατόμων πήρε άδεια τουλάχιστον 8 ημέρες ;

iii. Πόσα άτομα πήραν άδεια πάνω από 9 ημέρες ; **(3x2=6μον.)**

Δ. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τις εκατό και να βρείτε το εμβαδό του . **(5 μον.)**

Ε. Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό . **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1°:

Α. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές. Οι ποσοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, ενώ οι ποιοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
Οι ποσοτικές επιπλέον χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς.
Οι διακριτές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι μεμονωμένες, διακριτές τιμές, ενώ οι συνεχείς παίρνουν τιμές από ένα διάστημα (α,β).

Β. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες. Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος, χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή ισοδύναμα τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες ν_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής. Αν συμβολίσουμε με α_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων τότε είναι:

$$\alpha_i = \nu_i \cdot \frac{360^\circ}{\nu} = 360^\circ \cdot f_i \ , \ i = 1, 2, ..., \kappa \ .$$

Γ. i. Ισχύει $f_i = \dfrac{v_i}{v}$, όπου v_i η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής x_i.
Επίσης , για i=1,2,....,k έχουμε :

$$0 \le v_i \le v \Leftrightarrow 0 \le \frac{v_i}{v} \le \frac{v}{v} = 1 \ .$$ Συνεπώς $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., k$.

ii. Ισχύει $f_1 + f_2 + ... + f_k = \dfrac{v_1}{v} + \dfrac{v_2}{v} + ... + \dfrac{\nu_\kappa}{\nu} = \dfrac{v_1 + v_2 + ... + v_k}{v} = \dfrac{v}{v} = 1.$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. $\left(\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 7x - 4\right)' = x^2 - 5x + 7$.

ii. $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = l_1 + l_2$.

iii. $v_1 + \nu_2 + ... + \nu_\kappa = \nu$.

Θέμα 2ο:

Α.i.

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$
0	2	2	4	4
1	4	6	8	12
2	4	10	8	20
3	5	15	10	30
4	5	20	10	40
5	5	25	10	50
6	7	32	14	64
7	7	39	14	78
8	6	45	12	90
9	5	50	10	100
Άθροισμα	50	-	100	-

Όπου, $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\% = f_i \cdot 100$.

$N_1 = \nu_1,\ N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1,\ F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

$F_i\% = F_i \cdot 100$

ii. α. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό το πολύ 5 είναι $N_6 = 25$ και το ποσοστό τους $F_6\% = 50\%$.

β. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό κάτω από 5 είναι $N_5 = 20$ και το ποσοστό τους $F_5\% = 40\%$.

γ. Οι μαθητές που έγραψαν βαθμό τουλάχιστον 5 είναι $\nu - N_5 = 50 - 20 = 30$ και το ποσοστό τους $100\% - F_5\% = 100\% - 40\% = 60\%$.

iii. Παρατηρούμε ότι: $f_{10}\% + f_9\% + f_8\% = 36\%$, οπότε για να εγγραφεί κάποιος στη σχολή πρέπει να έχει βαθμό τουλάχιστον 7.

Β. Έχουμε την $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x\neq 1 \\ x^2-\dfrac{x}{2} &, x=1 \end{cases}$.

i.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

και $f(1)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

ii. Εφόσον, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

<u>Θέμα 3^{o}</u>:

A. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-\kappa x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Για να τέμνει η f(x) τον άξονα $x'x$ στο 1 πρέπει:

$f(1)=0 \Leftrightarrow 1-\kappa+2=0 \Leftrightarrow \kappa=3$.

B. Για κ=3 έχουμε $f(x)=x^3-3x+2$.

i.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x-2x+2}{x^2-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-1)-2(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x-2)}{(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

ii. → Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2-3$.

→ Λύνουμε την εξίσωση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow 3x^2=3 \Leftrightarrow$

$x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

→ Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	$+$	0 $-$	0 $+$	
f	↗	↘	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-1]$ και $[1,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=-1 το $f(-1)=-1+3+2=4$ και τοπικό ελάχιστο για x=1 το $f(1)=1-3+2=0$.

iii. Είναι: $f(2)=8-6+2=4$ και $f'(2)=12-3=9$. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $M(2,f(2))$ είναι:

$\varepsilon: y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-4=9(x-2) \Leftrightarrow$

$y=9x-18+4 \Leftrightarrow y=9x-14.$

Θέμα 4^o:

Α. Το πλάτος c των κλάσεων είναι όσο η διαφορά δύο διαδοχικών κεντρικών τιμών , οπότε $c = x_2 - x_1 = 6 - 2 = 4$.

Επίσης γνωρίζουμε ότι :

* $v_4 = 2v_1 \quad (1)$

* Για τη v_2 έχουμε : $g(x) = x^2 + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 5 \geq 5 \Leftrightarrow g(x) \geq 5$ οπότε η g έχει ελάχιστο το 5 . Άρα $\boxed{v_2 = 5}$

* $v_3 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(x^2 + 2x - 8\right)}{x(x-2)} = 4$

δηλαδή $\boxed{v_3 = 4}$

* $\boxed{v_5 = 2}$ και $\boxed{v = 20}$

Επίσης $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 20 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} v_1 + 5 + 4 + 2v_1 + 2 = 20 \Leftrightarrow$
$3v_1 = 9 \Leftrightarrow \boxed{v_1 = 3}$ και τότε $\boxed{v_4 = 6}$

ο πίνακας συχνοτήτων είναι :

$[$κλάσεις$)$	**x_i**	**v_i**	**f_i%**	**N_i**	**F_i%**
$[0,4)$	2	3	15	3	15
$[4,8)$	6	5	25	8	40
$[8,12)$	10	4	20	12	60
$[12,16)$	14	6	30	18	90
$[16,20)$	18	2	10	20	100
Σύνολο	**-**	**20**	**100**	**-**	**-**

Γ. Προσθέτουμε τις στήλες $f_i\% = \frac{v_i}{v}100$ και N_i , όπου $N_1=v_1$ και $N_2 = N_1 + v_2$ κ.ο.κ και έχουμε ότι :

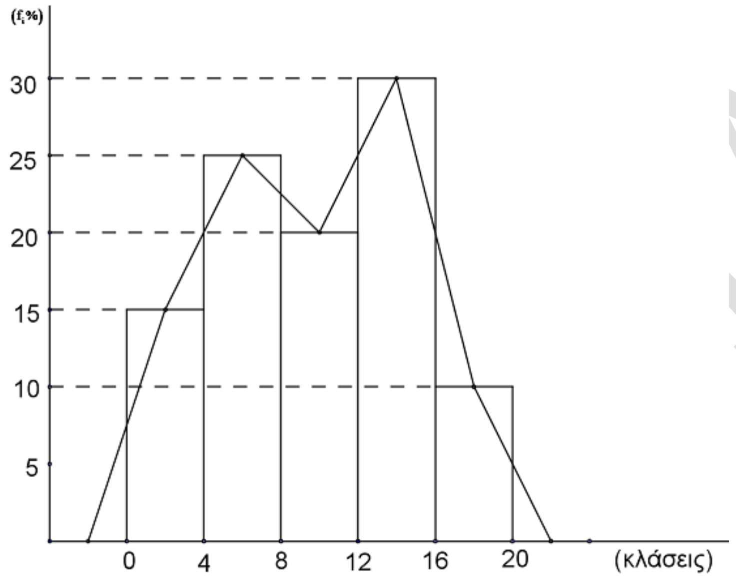
i. Τα άτομα που πήραν άδεια το πολύ 12 ημέρες είναι $N_3=12$.

ii. Το ποσοστό των ατόμων που πήρε άδεια τουλάχιστον 8 ημέρες είναι $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 60\%$.

iii. Τα άτομα που πήραν άδεια πάνω από 9 ημέρες είναι :

$$\frac{3}{4}v_3 + v_4 + v_5 = \frac{3}{4} \cdot 4 + 6 + 2 = 11.$$

Δ. Το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό είναι :



Το πολύγωνο έχει εμβαδό $E = f_1\% + ... + f_5\% = 100$.

Ε. Το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων είναι :