**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** **2**

**Β' Λυκείου**

**Ον/μο:……………………….** **ΕΠΑ.Λ.**

**Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων** **05-10-14**

**Θέμα 1$^o$:**

**Α.i.** Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση; **(4 μον.)**

**ii.** Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

**iii.** Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$; **(6 μον.)**

**Β.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

**i.** Η εξίσωση $5x^2 + 3y = 9$ είναι γραμμική. **Σ Λ**

**ii.** Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους έχει μοναδική λύση τότε $D \neq 0$. **Σ Λ**

**iii.** Το σύστημα $\left.\begin{aligned} 7x - 3y &= 9 \\ -5x + 4y &= 11 \end{aligned}\right\}$ είναι προτιμότερο να το λύσουμε με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **Σ Λ**

**iv.** Η συνάρτηση $f(x) = 5x + 9$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

**v.** Η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x - 7$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

**(5x2=10 μον.)**

**Θέμα 2$^o$:** Δίνεται το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x - 3y &= 5 \\ 2x + 5y &= -1 \end{aligned}\right\}$.

**Α.** Να λύσετε γραφικά το σύστημα. **(7 μον.)**

**Β.** Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης. **(5 μον.)**

**Γ.** Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. **(6 μον.)**

**Δ.** Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των οριζουσών. **(7 μον.)**

**<u>Θέμα 3ο:</u>**

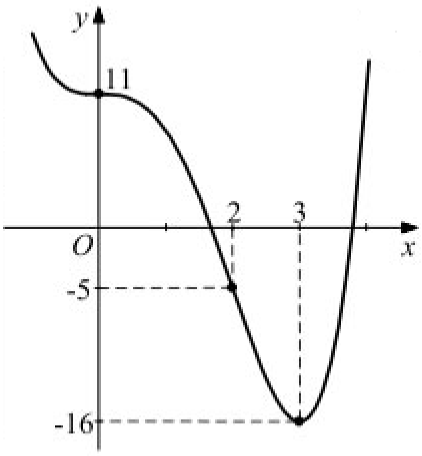
**Α.** Να μελετήσετε την $f(x) = -x^3 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 7$ ως προς τη μονοτονία. **(5 μον.)**

**Β .** Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης:

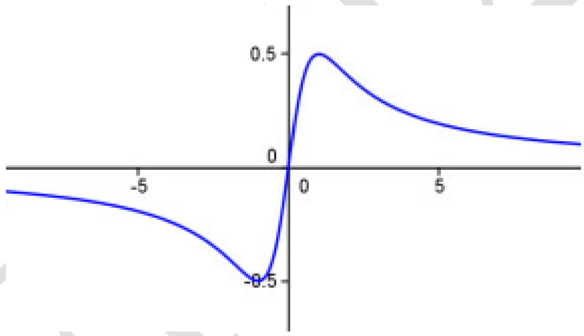
$$g(x) = -\frac{4}{|x|+3}.$$ **(4 μον.)**

**Γ.** Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα, να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να πείτε αν είναι άρτιες ή περιττές.

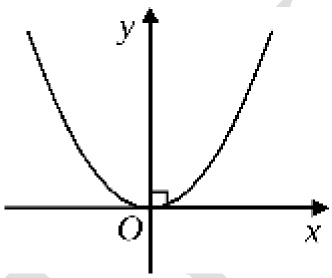
**i.**



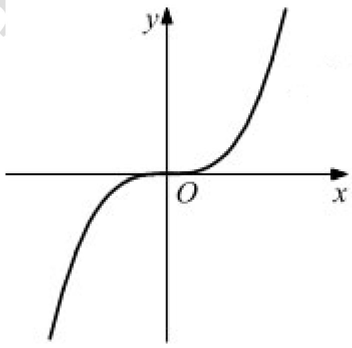

**ii.**




**iii.**




**iv.**




**(4x4=16 μον.)**

**Θέμα 4$^{o}$:**

**Α.** Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{matrix} (\lambda-1)x+8y=4 \\ x+(\lambda+1)y=2 \end{matrix}\right\}$ για τις διάφορες τιμές του λ. **(12 μον.)**

**Β.** Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x^7+x^5+x$.

**i.** Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία. **(4 μον.)**

**ii.** Να λύσετε την ανίσωση: $h(2x-3)<h(5x+1)$. **(4 μον.)**

**iii.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $h(2014)$, $h(2015)$. **(5 μον.)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

## Θέμα 1$^{o}$:

**Α. i.** Γραμμική εξίσωση ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$.

**ii.** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ισχύει ότι $f(x_1)<f(x_2)$.

**iii.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0\in A$ όταν $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

**Β.** **i.**Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

## Θέμα 2$^{o}$:

Έχουμε το σύστημα $\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{matrix}\right\}(\Sigma)$

**Α.** Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1: x-3y=5$ και $\varepsilon_2: 2x+5y=-1$. Θα κατασκευάσουμε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις δύο ευθείες. Έχουμε τους εξής πίνακες τιμών των δύο ευθειών:

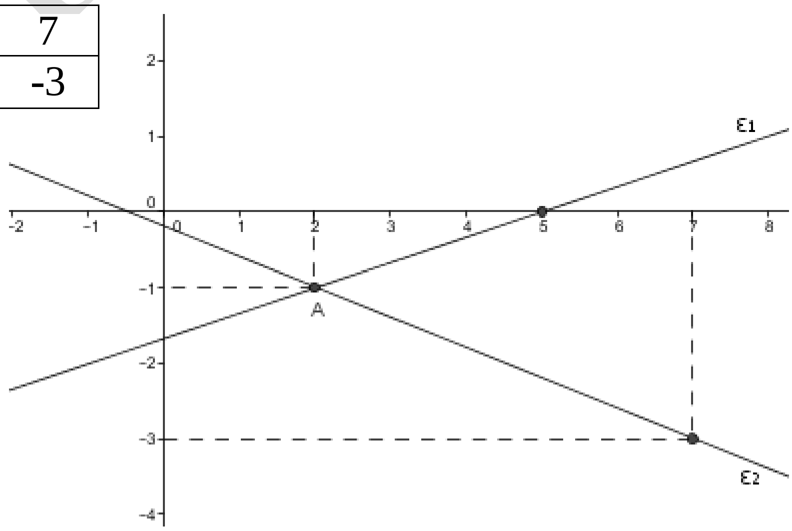
$\varepsilon_1$:

| | | |
|---|---|---|
| x | 2 | 5 |
| y | -1 | 0 |

$\varepsilon_2$:

| | | |
|---|---|---|
| x | 2 | 7 |
| y | -1 | -3 |

Άρα έχουμε:




Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

**Β.** $\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+3y \\ 2(5+3y)+5y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+3y \\ 10+6y+5y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix} x=5+3y \\ 6y+5y=-1-10 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+3y \\ 11y=-11 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=5+3\cdot(-1) \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=2 \\ y=-1 \end{pmatrix}$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

**Γ.** $\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{matrix}\right\} \overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} -2x+6y=-10 \\ 2x+5y=-1 \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix} 11y=-11 \\ x-3y=5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-1 \\ x+3=5 \end{matrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y=-1 \\ x=2 \end{pmatrix}$

Δηλαδή (x,y)=(2,-1).

**Δ.** Βρίσκουμε την ορίζουσα των συντελεστών του $\left.\begin{matrix} x-3y=5 \\ 2x+5y=-1 \end{matrix}\right\}(\Sigma)$.

Είναι: $D=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=5+6=11\neq 0$, άρα το (Σ) έχει μοναδική λύση.

Θα βρούμε και τις άλλες ορίζουσες του (Σ). Έχουμε:

$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=25-3=22$ και $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1-10=-11$

Τότε η λύση του (Σ) είναι: $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{22}{11},\frac{-11}{11}\right)=(2,-1)$.

## <u>Θέμα 3$^o$:</u>

**Α.** Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x)=-x^3+\frac{1}{\sqrt{x}}+7$

Για να ορίζεται η f πρέπει $x\geq 0$ και $x\neq 0$ οπότε $x>0$.

Δηλαδή, $A_f=(0,+\infty)$. Έστω $x_1,x_2\in A_f$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2 \Leftrightarrow x_1{}^3<x_2{}^3 \overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow} -x_1{}^3>-x_2{}^3$ **(1)**

$x_1<x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1}<\sqrt{x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}}>\frac{1}{\sqrt{x_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x_1}}+7>\frac{1}{\sqrt{x_2}}+7$ **(2)**

Προσθέτοντας τις (1), (2) κατά μέλη έχουμε:

$$-x_1^{\ 3}+\frac{1}{\sqrt{x_1}}+7>-x_2^{\ 3}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}+7 \Leftrightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

**Β.** Έχουμε την $g\left(x\right)=-\frac{4}{\left|x\right|+3}$.

Η g ορίζεται όταν $\left|x\right|+3\neq 0 \Leftrightarrow \left|x\right|\neq -3$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Τότε: $\left|x\right|\geq 0 \Leftrightarrow \left|x\right|+3\geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\left|x\right|+3}\leq\frac{1}{3} \overset{\cdot(-4)}{\Leftrightarrow} -\frac{4}{\left|x\right|+3}\geq -\frac{4}{3} \Leftrightarrow g\left(x\right)\geq -\frac{4}{3}$.

Δηλαδή η g παρουσιάζει ελάχιστο το $-\frac{4}{3}$ για x=0.

**Γ.i.** Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,3\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[3,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -16 για x=3. Δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

**ii.** Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,-1\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[-1,1\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[1,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -0,5 για x=-1 και ολικό μέγιστο το 0,5 για x=1. Είναι περιττή γιατί έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

**iii.** Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[0,+\infty\right)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0 για x=0. Είναι άρτια γιατί έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

**iv.** Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. Δεν παρουσιάζει ακρότατα. Είναι περιττή γιατί έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

**<u>Θέμα 4$^{o}$:</u>**

**A.** Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l}(\lambda-1)x+8y=4\\ x+(\lambda+1)y=2\end{array}\right\}(\Sigma)$

Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ).

$$D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 8\\ 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)-8=\lambda^2-1-8=\lambda^2-9=(\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$D_x=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=4(\lambda+1)-16=4\lambda+4-16=4\lambda-12=4(\lambda-3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2(\lambda-1)-4=2\lambda-2-4=2\lambda-6=2(\lambda-3)$$

* Αν $D\neq 0\Leftrightarrow(\lambda-3)(\lambda+3)\neq 0\Leftrightarrow\lambda\neq\pm 3$ το (Σ) έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{4(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)},\frac{2(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)}\right)=\left(\frac{4}{(\lambda+3)},\frac{2}{(\lambda+3)}\right)$$

* Αν $D=0\Leftrightarrow\lambda=\pm 3$ τότε:

→Αν λ=3 το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{array}{l}2x+8y=4\\ x+4y=2\end{array}\right\}\overset{:2}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+4y=2\\ x+4y=2\end{array}\right\}$. Οπότε το (Σ) έχει άπειρες λύσεις της μορφής (x,y)=(2-4y,y) με $y\in\mathbb{R}$.

→ Αν λ=-3 το (Σ) γίνεται: $\left.\begin{array}{l}-4x+8y=4\\ x-2y=2\end{array}\right\}\overset{:(-4)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}x-2y=-1\\ x-2y=2\end{array}\right\}$. Οπότε το (Σ) είναι αδύνατο.

**B.** Έχουμε τη συνάρτηση: $h(x)=x^7+x^5+x$.

**i.** Η h ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε: $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^{\,7}<x_2^{\,7}$ (1)

$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^{\,5}<x_2^{\,5}$ (2)

$x_1<x_2$ (3)

Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη προκύπτει:

$x_1^{\,7}+x_1^{\,5}+x_1<x_2^{\,7}+x_2^{\,5}+x_2\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)$. Δηλαδή η h είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

**ii.** Είναι: $h(2x-3)<h(5x+1)\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}2x-3<5x+1\Leftrightarrow 2x-5x<1+3\Leftrightarrow$
$-3x<4\Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{3}.$

**iii.** Έχουμε ότι: $2014<2015\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(2014)<h(2015).$