ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

19

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός **07-10-17**

Θέμα 1^{ο}:

Α. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται συνεχής; **(5 μον.)**

Β. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η $f(x)=x^2$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η παράγωγός της είναι $f'(x)=2x$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η $f(x)=ημx$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

iii. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. Η $g(x)=x^3+9x-2$ είναι συνεχής. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=$.................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ τότε

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$............................ .

iii. $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+5x-7\right)'=$...................... .

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4+1}{x+3}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^3-7x+6}$ **iv.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}$

(4x3=12 μον.)

Β. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i. $f(x)=3x^2-5\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\pi$

ii. $g(x)=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii. $h(x)=\sqrt{x^2+3x+5}$ **(3x3=9μον.)**

Γ. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$\omega(x)=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$. **(4 μον.)**

Θέμα 3^o:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ,x\neq 3\\ 2\alpha+1 & ,x=3\end{cases}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$, $f(-1)$ και $f(3)$. **(6 μον.)**

iii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$. **(6 μον.)**

iv. Να βρείτε την τιμή του α έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο 3. **(3 μον.)**

Β. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(-1, 2) να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)\cdot(x^2+x)}{2-\sqrt{x+5}}$. **(7 μον.)**

Θέμα 4^o:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(2 μον.)**

ii. Να βρείτε τις τιμές $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ και $\varphi(-1)$. **(6 μον.)**

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της φ με τους άξονες. **(2 μον.)**

iv. Αν $g(x) = x^2 + 4$, να βρείτε τις συναρτήσεις

$\varphi(x) + g(x)$ και $\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$. **(3 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} + \sqrt{x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$. **(4 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^{o}:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται συνεχής όταν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Β. Μία συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Γ. Είναι:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_0+h)^2-x_0{}^2}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0{}^2+2x_0h+h^2-x_0{}^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2x_0h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x_0+h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(2x_0+h)=2x_0$$

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iii.** Σ

Ε. i. $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l_2$ τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{l_1}{l_2},\ l_2\neq 0\ .$$

iii. $\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+5x-7\right)'=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{2x}{2}+5=x^2-x+5$.

Θέμα 2^o:

A. **i.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4+1}{x+3}=\dfrac{2\cdot 0^4+1}{0+3}=\dfrac{1}{3}$

ii.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3-2x}{2x^2-5x+3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2x\left(x^2-1\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x(x-1)(x+1)}{(2x-3)(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x(x+1)}{(2x-3)}=\frac{2\cdot 1\cdot(1+1)}{(2\cdot 1-3)}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Όπου για το $2x^2-5x+3$ έχουμε:

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1>0$. Άρα το τριώνυμο

έχει δύο ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{5\pm 1}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\frac{3}{2}\\ 1\end{array}\right.$.

iii.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^3-7x+6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)\left(x^2+2x-3\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2+2x+4\right)}{\left(x^2+2x-3\right)}=\frac{\left(2^2+2\cdot 2+4\right)}{\left(2^2+2\cdot 2-3\right)}=\frac{12}{5}.$$

Όπου για το x^3-7x+6 από σήμα Horner για ρ=2 έχουμε:

$$\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & -7 & 6 & 2 \\ \downarrow & 2 & 4 & -6 & \\ 1 & 2 & -3 & 0 & \end{array}$$

iv.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{\left(1-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{1-\left(\sqrt{x-2}\right)^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{1-x+2}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(1+\sqrt{x-2}\right)}{3-x}=\lim_{x\to 3}\left[-\left(1+\sqrt{x-2}\right)\right]=-\left(1+\sqrt{3-2}\right)=-2.$$

B. i. $f'(x)=\left(3x^2-5\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu\pi\right)'=6x+5\eta\mu x$.

ii. $g'(x)=\left(\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta}\right)'=$

$$\frac{(2\sigma\upsilon\nu\theta)'(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)-2\sigma\upsilon\nu\theta(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)'}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=$$

$$\frac{-2\eta\mu\theta(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)-2\sigma\upsilon\nu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=$$

$$\frac{-2\eta\mu^2\theta-2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta-2\sigma\upsilon\nu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=$$

$$\frac{-2\left(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=\frac{-2}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}.$$

iii. $h'(x)=\left(\sqrt{x^2+3x+5}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+3x+5}}\cdot\left(x^2+3x+5\right)'=$

$$\frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+5}}.$$

Γ. Είναι: $\omega(x)=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\varepsilon\varphi x$. Η πρώτη παράγωγος είναι:

$\omega'(x)=(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\omega''(x)=\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\right)'=-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^4 x}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)'=-\frac{2\sigma\upsilon\nu x(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^4 x}=\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\ .$$

Θέμα 3ο:

Α. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ,x\neq 3\\ 2\alpha+1 & ,x=3\end{cases}$.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=\mathbb{R}$.

ii. $f(0)=\dfrac{0^2-9}{0-3}=3$

$f(4)=\dfrac{4^2-9}{4-3}=\dfrac{16-9}{1}=7$

$f(-1)=\dfrac{(-1)^2-9}{-1-3}=\dfrac{1-9}{-4}=\dfrac{-8}{-4}=2$

$f(3)=2\alpha+1$

iii. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$.

iv. Για να είναι η f συνεχής στο 3 πρέπει $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$$2\alpha+1=6\Leftrightarrow 2\alpha=6-1\Leftrightarrow 2\alpha=5\Leftrightarrow \alpha=\frac{5}{2}\ .$$

Β. Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο Α(-1, 2) θα είναι $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)=2$.Τότε:

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot(x^2+x)}{2-\sqrt{x+5}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot x(x+1)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}{\left(2-\sqrt{x+5}\right)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot x(x+1)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x+5}\right)^2}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot x(x+1)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}{4-x-5}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot x(x+1)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}{-x-1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)\cdot x(x+1)\left(2-\sqrt{x+5}\right)}{-(x+1)}=$$

$$-\lim_{x\to -1}f(x)\cdot x\left(2-\sqrt{x+5}\right)=-2\cdot(-1)\cdot 0=0.$$

Θέμα 4^{o}:

A. Έχουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=x^2-5x+6$.

i. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A=\mathbb{R}$.

ii. Είναι: $\varphi(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$

$$\varphi(1)=1^2-5\cdot 1+6=1-5+6=2$$

$$\varphi(-1)=(-1)^2-5\cdot(-1)+6=1+5+6=12$$

iii. Για να τέμνει η γραφική παράσταση της φ τον άξονα $x'x$ πρέπει y=0 δηλαδή $\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα Α(2,0) και Β(3,0). Για να τέμνει η γραφική παράσταση της φ τον άξονα $y'y$ πρέπει x=0 δηλαδή $\varphi(0)=0^2-5\cdot 0+6=6$. Οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το Γ(0,6).

iv. Η $g(x)=x^2+4$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$. Στο κοινό πεδίο ορισμού Α έχουμε:

$$\varphi(x)+g(x)=x^2-5x+6+x^2+4=2x^2-5x+10$$

$\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+4}$ όπου πρέπει $x^2+4\neq 0$ που ισχύει.

B.i. Για να ορίζεται η $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}+\sqrt{x}$ πρέπει $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $x\geq 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{x-1}+\sqrt{x}\right)'=$

$$\frac{(x+2)'(x-1)-(x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\ ,\ x\in A^* .$$

iii. Είναι: $f'(4)=-\frac{3}{(4-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{4}}=-\frac{3}{9}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=-\frac{1}{12}$

και $f(4)=\frac{4+2}{4-1}+\sqrt{4}=\frac{6}{3}+2=2+2=4$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(4,f(4))$ είναι:

$y-f(4)=f'(4)(x-4)$ δηλαδή

$y-4=-\frac{1}{12}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{x}{12}+\frac{1}{3}+4\Rightarrow y=-\frac{x}{12}+\frac{13}{12}$.