

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

18

Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)

15-01-17

Όν/μο:.....

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός, Στατιστική

Θέμα 1^ο:

- A.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**
- B.** Τι εκφράζουν τα μέτρα θέσης και ποια είναι αυτά(αναφορικά); **(5 μον.)**
- Γ.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση και c πραγματικός αριθμός.
 Να αποδείξετε ότι: $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. **(5 μον.)**
- Δ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :
- | | |
|--|--------------|
| i. Η διάμεσος είναι πάντα η μεσαία παρατήρηση. | Σ Λ |
| ii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . | Σ Λ |
| iii. $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. | Σ Λ |
| iv. Το πλάτος κάθε κλάσης ισούται με την ημιδιαφορά των άκρων της. | Σ Λ |
- (4x1=4 μον.)**

E. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

- i.** $(f \cdot g)'(x) = \dots\dots\dots$
- ii.** Αν t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X , τότε η μέση τιμή τους ισούται με $\dots\dots\dots$
- iii.** Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής X ισούται με $\dots\dots\dots$

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2^ο:

Στην «Αττική οδό» εξυπηρετούνται καθημερινά 200 χιλιάδες οχήματα, τα οποία διανύουν από 5 έως 45 χιλιόμετρα. Η διανυόμενη απόσταση σε χιλιόμετρα από τα οχήματα αυτά παρουσιάζεται στην πρώτη στήλη του πίνακα:

Κλάσεις	Κέντρο x_i	n_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)		60			
[15,25)					68
[25,35)				180	
[35,45)					
Σύνολο	-	200		-	-

- A. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε. (10 μον.)
- B. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα $(x_i, f_i\%)$ και το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων. (4 μον.)
- Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. (8 μον.)
- Δ. Να βρείτε το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων. (3 μον.)

Θέμα 3^ο:

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{x-2} + \sqrt{x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (4 μον.)
- ii. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. (4 μον.)
- iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$. (4 μον.)

- B.** Η βαθμολογία 50 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:
 3, 4, 5, 8, 9, 7, 6, 8, 7, 10, 8, 7, 6, 5, 3, 8, 5, 6, 6, 6, 3, 5, 6, 4, 2, 9, 8,
 7, 7, 1, 6, 3, 1, 5, 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 10
- i.** Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών
 συχνοτήτων, απόλυτων και σχετικών. **(4 μον.)**
- ii.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. **(6 μον.)**
- iii.** Πόσοι φοιτητές είχαν βαθμό το πολύ 7; **(3 μον.)**

Θέμα 4^ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5$.

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)**
- B.** Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της
 συνάρτησης. **(7 μον.)**
- Γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. **(6 μον.)**
- Δ.** Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της συνάρτησης. **(6 μον.)**
- Ε.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
 $A = 3f(0) - 2f'(1) + f''(3)$. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^ο:

A. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

B. Τα μέτρα θέσης εκφράζουν τη θέση του κέντρου των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής. Τα μέτρα θέσης είναι η διάμεσος και η μέση τιμή.

Γ. Έστω $F(x) = c \cdot f(x)$. Τότε έχουμε:

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x_0 + h) - c \cdot f(x_0)}{h} =$$

$$c \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c \cdot f'(x_0)$$

Δ. i. Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iiii.** Λ

E. i. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

ii. Αν t_1, t_2, \dots, t_v είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ,

τότε η μέση τιμή τους ισούται με $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_v}{v} = \frac{\sum_{i=1}^v t_i}{v}$.

iii. Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής X ισούται με $R = X_{\max} - X_{\min}$.

Θέμα 2^ο:

A.

Κλάσεις	Κέντρο x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
[5,15)	10	60	30	60	30	600
[15,25)	20	76	38	136	68	1520
[25,35)	30	44	22	180	90	1320
[35,45)	40	20	10	200	100	800
Σύνολο	-	200	100	-	-	4240

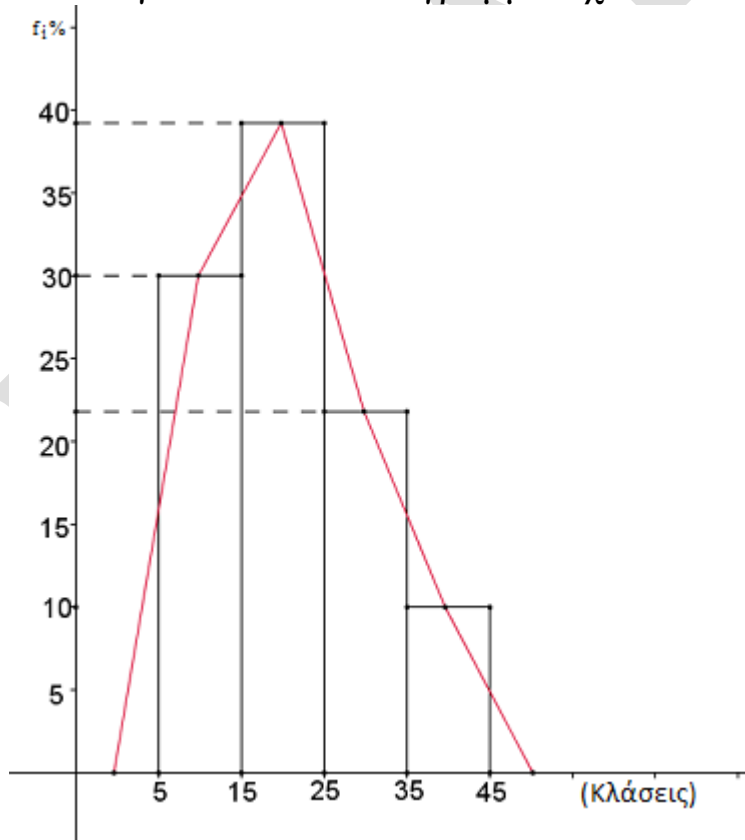
Τα κέντρα των κλάσεων είναι το ημιάθροισμα των ορίων κάθε κλάσης. Επίσης, $f_1\% = \frac{v_1}{v} \cdot 100 = 30\%$, $N_1 = v_1 = 60$, $F_1\% = f_1\% = 30\%$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 38\%$, $f_2 = \frac{v_2}{v} \Leftrightarrow v_2 = 76$, $N_2 = N_1 + v_2 = 136$,

$v_3 = N_3 - N_2 = 44$, $f_3\% = \frac{v_3}{v} \cdot 100 = 22\%$, $F_3\% = F_2\% + f_3\% = 90\%$,

$f_4\% = 100\% - F_3\% = 10\%$ και $f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow v_4 = 20$.

B. Το πολύγωνο και το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων είναι:

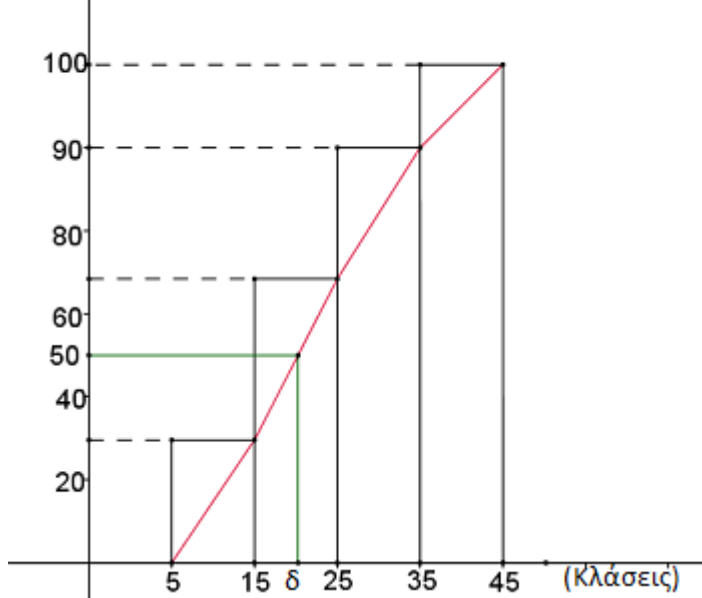


Γ. Για τη μέση τιμή συμπληρώνουμε τη στήλη $x_i v_i$ στον πίνακα και:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{n} = \frac{4240}{200} = 21,2 .$$

Για τη διάμεσο κατασκευάζουμε το

πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %:



Οπότε η διάμεσος είναι περίπου 18.

Δ. Το πλήθος των οχημάτων που διανύουν απόσταση τουλάχιστον 25 χιλιομέτρων είναι $v_3 + v_4 = 44 + 20 = 64$ οχήματα.

Θέμα 3^ο:

Α.ι. Για να ορίζεται η $f(x) = \frac{x+4}{x-2} + \sqrt{x}$ πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

και $x \geq 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [0, 2) \cup (2, +\infty)$.

ii. Η παράγωγος της f είναι: $f'(x) = \left(\frac{x+4}{x-2} + \sqrt{x} \right)'$

$$\frac{(x+4)'(x-2) - (x+4)(x-2)'}{(x-2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x-2-x-4}{(x-2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$-\frac{6}{(x-2)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x \in A^* .$$

- iii. Είναι: $f'(1) = -6 + \frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$ και $f(1) = -5 + 1 = -4$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(1, f(1))$ είναι:
 $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ δηλαδή
 $y - (-4) = \frac{11}{2}(x - 1) \Rightarrow y + 4 = \frac{11}{2}x - \frac{11}{2} \Rightarrow y = \frac{11}{2}x - \frac{19}{2}$.

B.i.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$	$x_i v_i$
1	3	0,06	6	3	0,06	6	3
2	2	0,04	4	5	0,1	10	4
3	5	0,1	10	10	0,2	20	15
4	3	0,06	6	13	0,26	26	12
5	7	0,14	14	20	0,4	40	35
6	9	0,18	18	29	0,58	58	54
7	7	0,14	14	36	0,72	72	49
8	7	0,14	14	43	0,86	86	56
9	4	0,08	8	47	0,94	94	36
10	3	0,06	6	50	1	100	30
Σύνολο	50	1	100	-	-	-	294

Όπου, $f_i = \frac{v_i}{v}$, $f_i\% = f_i \cdot 100$.

$N_1 = v_1$, $N_2 = N_1 + v_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1$, $F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

$F_i\% = F_i \cdot 100$

- ii. Για τη μέση τιμή συμπληρώνουμε τη στήλη $x_i v_i$ στον πίνακα και:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} = \frac{294}{50} = 5,88. \text{ Για τη διάμεσο, εφόσον } v=50 \text{ (άρτιος) θα}$$

$$\text{είναι } \delta = \frac{25^n + 26^n}{2} = \frac{6+6}{2} = 6.$$

- iii. Οι φοιτητές που είχαν βαθμό το πολύ 7 είναι $N_7=36$.

Θέμα 4^ο:

A. Η $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

B. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με :

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 5 \right)' = x^2 - 5x + 4.$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με:

$$f''(x) = (x^2 - 5x + 4)' = 2x - 5.$$

Γ. Λύνουμε της εξίσωση:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 16 = 9 > 0$,
 άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις τις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
f'	+	○	-	○	+
f	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[4, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 4]$.

Δ. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ και τοπικό ελάχιστο για $x=4$.

Ε. Είναι: $A = 3f(0) - 2f'(1) + f''(3) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 18$.