ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

17

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός, Στατιστική **06-11-16**

Θέμα 1

Θέμα 1ο:

Α. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές (αναλυτικά); **(5 μον.)**

Β. Να διατυπώσετε το κριτήριο της 1ης παραγώγου. **(5 μον.)**

Γ. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής X και $f_1, f_2, ..., f_\kappa$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των προηγούμενων τιμών .Να αποδείξετε ότι : **i.** $0 \le f_i \le 1$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$

ii. $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$

(2x2,5=5 μον.)

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το χρώμα ματιών είναι μια ποσοτική μεταβλητή. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση. **Σ Λ**

iii. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$. **Σ Λ**

iv. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 0$. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = $..................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = $....................... .

iii. Το ύψος είναι μία …………… μεταβλητή και ειδικότερα ……………….. .

(3x2=6 μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Ρωτήσαμε 20μαθητές της Γ' Λυκείου του Φροντιστηρίου Ευκλείδης, τον αριθμό των αδερφών τους. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

0	2	1	2	1	1	1	2	2	0
1	1	0	2	0	3	4	1	1	3

i. Να κατασκευάσετε πίνακα όλων των συχνοτήτων. **(6 μον.)**

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν το πολύ 2 αδέρφια. **(2 μον.)**

iii. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 1 αλλά το πολύ 3 αδέρφια. **(4 μον.)**

iv. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν σε πολύτεκνη οικογένεια. (Πολύτεκνη θεωρείται η οικογένεια που έχει τουλάχιστον 3 παιδιά). **(2 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, x\neq 2\\ 4 \quad , x=2\end{cases}$.

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. **(6 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 2. **(5 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\sqrt{x+3}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε τις τιμές f(0), f(6) και f(1). **(4 μον.)**

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$. **(4 μον.)**

Β. Να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

x_i	v_i	f_i	$f_i\%$
-2		0,10	
-1		0,35	
0		0,15	
1		0,30	
2			
Σύνολο	20		

(13 μον.)

Θέμα 4°:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)**

Β. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης. **(7 μον.)**

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. **(6 μον.)**

Δ. Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της συνάρτησης. **(6 μον.)**

Ε. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2f(0) + 3f'(1)$. **(3 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1^o:

Α. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές. Οι ποσοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, ενώ οι ποιοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
Οι ποσοτικές επιπλέον χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς.
Οι διακριτές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι μεμονωμένες, διακριτές τιμές, ενώ οι συνεχείς παίρνουν τιμές από ένα διάστημα (α,β).

Β. ● Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β) ,τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο .

● Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο $\left(x_0,\beta\right)$, τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο .

Γ. i. Ισχύει $f_i=\dfrac{v_i}{v}$, όπου v_i η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής x_i.
Επίσης , για i=1,2,....,k έχουμε :
$0\le v_i\le \nu \Leftrightarrow 0\le \dfrac{v_i}{v}\le\dfrac{v}{v}=1$. Συνεπώς $0\le f_i\le 1$ για κάθε $i=1,2,...,k$.

ii. Ισχύει $f_1+f_2+...+f_k=\dfrac{v_1}{v}+\dfrac{v_2}{v}+...+\dfrac{\nu_\kappa}{\nu}=\dfrac{v_1+v_2+...+v_k}{v}=\dfrac{v}{v}=1.$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iii.** Λ

Ε. i. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{\mathbf{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}}{\mathbf{g^2(x)}}$ με $\mathbf{g(x)\neq 0}$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ τότε $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{l_1}}$ και $\mathbf{l_1\ge 0}$.

iii. Το ύψος είναι μία **ποσοτική** μεταβλητή και ειδικότερα **συνεχής** .

www.efklidis.edu.gr Τρίκαλα τηλ.-fax(24310-36733)

Θέμα 2^{o}:

A.i.

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0	4	0,2	20	4	0,2	20
1	8	0,4	40	12	0,6	60
2	5	0,25	25	17	0,85	85
3	2	0,1	10	19	0,95	95
4	1	0,05	5	20	1	100
Σύνολο	**20**	**1**	**100**	**-**	**-**	**-**

Όπου, $f_i = \dfrac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\% = f_i \cdot 100$.

$N_1 = \nu_1,\ N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1,\ F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

$F_i\% = F_i \cdot 100$

ii. Το πλήθος των μαθητών που έχουν το πολύ 2 αδέρφια είναι: $N_3 = 17$.

iii. Το πλήθος των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 1 αλλά το πολύ 3 αδέρφια είναι: $\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 8 + 5 + 2 = 15$.

Το ποσοστό των μαθητών που έχουν τουλάχιστον 1 αλλά το πολύ 3 αδέρφια είναι: $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 40\% + 25\% + 10\% = 75\%$.

iv. Το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν σε πολύτεκνη οικογένεια είναι: $f_4\% + f_5\% = 10\% + 5\% = 15\%$.

B.i. Έχουμε την $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$.

ii. Εφόσον $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 4$ η f θα είναι συνεχής στο 2.

Θέμα 3ο:

A.i. Για να ορίζεται η $f(x)=x^2-\sqrt{x+3}$ πρέπει $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$.

Οπότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=[-3,+\infty)$.

ii. $f(0)=0^2-\sqrt{0+3}=0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}.$

$f(6)=6^2-\sqrt{6+3}=36-\sqrt{9}=36-3=33.$

$f(1)=1^2-\sqrt{1+3}=1-\sqrt{4}=1-2=-1.$

iii. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $f'(x)=\left(x^2-\sqrt{x+3}\right)'=2x-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\cdot(x+3)'=2x-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

Οπότε $f'(1)=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(1,f(1))$ είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ δηλαδή

$y-(-1)=\frac{7}{4}(x-1)\Rightarrow y+1=\frac{7}{4}x-\frac{7}{4}\Rightarrow \mathbf{y=\frac{7}{4}x-\frac{11}{4}}$.

B.

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$
-2	2	0,10	10
-1	7	0,35	35
0	3	0,15	15
1	6	0,30	30
2	2	0,10	10
Σύνολο	**20**	**1**	**100**

Όπου έχουμε: $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1\Leftrightarrow f_5=0{,}1$.

$f_i\%=f_i\cdot 100$.

$f_i=\frac{\nu_i}{\nu}\Leftrightarrow \nu_i=f_i\cdot\nu_i$.

<u>Θέμα 4ο</u>:

Α. Η $f(x)=2x^3-9x^2+12x+5$ έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

Β. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με :

$f'(x)=\left(2x^3-9x^2+12x+5\right)'=6x^2-18x+12$.

Γ. Λύνουμε της εξίσωση:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-18x+12=0 \overset{:6}{\Leftrightarrow} x^2-3x+2=0$ **(1)**

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9-8=1>0$, άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις τις:

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{4}{2}=2 \\ x_2=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	1		2		$+\infty$
f'	+	0	-	0	+	
f	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[2,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Δ. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για x=1 και τοπικό ελάχιστο για x=2.

Ε. Είναι: $A=2f(0)+3f'(1)$

$A=2\cdot5+3\cdot(6-18+12)$

$A=10+3\cdot0$

$A=10$