

ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

16

Γ' Λυκείου

30-09-16

Όν/μο:.....

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός

**Θέμα1<sup>ο</sup>:**

- A. Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της; (15μον.)
- B. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης  $f(x) = c$  ισούται με 0. (10μον.)

**Θέμα2<sup>ο</sup>:**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 6x + 9}$ .

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (15μον.)
- B. Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης  $f(0)$ ,  $f(8)$  και  $f(-1)$ . (10μον.)

**Θέμα3<sup>ο</sup>:**

A. Να υπολογίσετε τα όρια:

i.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$       ii.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$  (2x5=10μον.)

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases} \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 1. \quad (15\text{μον.})$$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>:**

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο  $x = x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ , όπου το  $t$  μετριέται σε δευτερόλεπτα και το  $x$  σε μέτρα.

**A.** Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου για  $t=1s$ .

**B.** Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

**Γ.** Να βρείτε πότε το σημείο κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση και πότε κατά την αρνητική.

**Δ.** Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 4s. **(25μον.)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα1<sup>ο</sup>:

**A.** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**B.** Έστω  $x \neq x_0$ . Τότε :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

### Θέμα2<sup>ο</sup>:

**A.** Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 6x + 9}$  έχουμε:  
 $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$  και  $x^2 - 6x + 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ .

Επομένως,  $A_f = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$ .

**B.**  $f(0) = \frac{\sqrt{0+1}}{0^2 - 6 \cdot 0 + 9} = \frac{1}{9}$ .

$$f(8) = \frac{\sqrt{8+1}}{8^2 - 6 \cdot 8 + 9} = \frac{\sqrt{9}}{64 - 48 + 9} = \frac{3}{25}.$$

$$f(-1) = \frac{\sqrt{-1+1}}{(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 9} = 0.$$

### Θέμα3<sup>ο</sup>:

**A. i.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x} = 2$ .

**ii.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{B. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1) \left(x + \frac{2}{5}\right)}{x - 1} = 5 \left(1 + \frac{2}{5}\right) = 5 + 2 = 7$$

Όπου για το τριώνυμο  $5x^2 - 3x - 2$  έχουμε :

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 9 + 40 = 49 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 7}{10} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \end{cases} .$$

Οπότε, εφόσον  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 7$  η  $f$  είναι συνεχής στο 1.

### Θέμα 4<sup>ο</sup>:

**A.** Η ταχύτητα του σώματος είναι :

$$u(t) = x'(t) = (t^3 - 12t^2 + 36t)' = 3t^2 - 24t + 36 .$$

Η επιτάχυνση του σώματος είναι:

$$a(t) = u'(t) = (3t^2 - 24t + 36)' = 6t - 24 .$$

Οπότε για  $t=1\text{s}$  έχουμε:  $u(1) = 3 - 24 + 36 = 15\text{m/s}$

$$a(1) = 6 - 24 = -18\text{m/s}^2$$

**B.** Το σώμα είναι ακίνητο όταν  $u(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \Leftrightarrow$

$$3(t^2 - 8t + 12) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2\text{s} \text{ ή } t = 6\text{s} .$$

**Γ.** Το σώμα κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση όταν:

$$u(t) > 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 24t + 36 > 0 \Leftrightarrow t < 2\text{s} \text{ ή } t > 6\text{s} \text{ ενώ κατά την}$$

αρνητική κατεύθυνση όταν  $u(t) < 0 \Leftrightarrow 2 < t < 6 .$

**Δ.** Από  $t=0\text{s}$  έως  $t=2\text{s}$  το διάστημα είναι:

$$S_1 = |x(2) - x(0)| = |8 - 48 + 72| = 32\text{m}$$

Από  $t=2\text{s}$  έως  $t=4\text{s}$  το διάστημα είναι:

$$S_2 = |x(4) - x(2)| = |64 - 192 + 144 - 32| = 16\text{m}$$

Άρα το ολικό διάστημα είναι:  $S_{\text{ολ.}} = S_1 + S_2 = 32 + 16 = 48\text{m}.$