ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

14

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Όλη η ύλη **08-05-16**

<u>Θέμα 1ο</u>:

Α. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$; **(6 μον.)**

Β. Σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται οι μεταβλητές και τι είναι καθεμία από αυτές; **(5 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$, είναι $f'(x)=(x)'=1,\ x\in\mathbb{R}$. **(5 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Σε μία κατανομή με θετική ασυμμετρία ισχύει $\bar{x}<\delta$. **Σ Λ**

ii. Στην κανονική κατανομή το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $\left(\bar{x}-s,\bar{x}+s\right)$. **Σ Λ**

iii. Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$. **Σ Λ**

(3x2=6 μον.)

Ε. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. $(fog)'(x)=$..................... .

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l_1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)}=$...................... .

iii. Εάν σε κάθε τιμή $x_1,x_2,...,x_\nu$, δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, με συντελεστές βαρύτητας $w_1,w_2,...,w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:…………………… .

(3x1=3 μον.)

Θέμα 2^{o}:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^3-27}, & -1\le x\ne 3\\ \alpha^2-\dfrac{25}{12}, & x=3\end{cases}$

i. Να αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\dfrac{1}{12}$. **(5 μον.)**

ii. Να βρείτε το α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=3$. **(6 μον.)**

Β1. Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,-3)$.

i. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-3$.

ii. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{13-f(x)}}{2f(x)+4}$.

(2x3=6 μον.)

Β2. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της g.

(2x4=8 μον.)

Θέμα 3ο:

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας ομαδοποιημένα σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους.

Χρόνος	x_i	ν_i	$f_i\%$
$[8,\ldots)$		40	
$[\ldots,\ldots)$			30
$[\ldots,\ldots)$			
$[\ldots,\ldots)$			
$[\ldots,\ldots)$			
Σύνολο			

Δίνεται ότι:

→ Το εύρος των παρατηρήσεων είναι R=10.

→ Το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 200.

→ Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 4^{η} κλάση είναι $\alpha_4 = 54^\circ$.

→ Το ποσοστό επί τοις εκατό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι πενταπλάσιο του $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-30x+25}{x^2-25}$.

Α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι c=2. **(3 μον.)**

Β. Να αποδείξετε ότι $\nu_2 = 60$, $\nu_3 = 50$, $\nu_4 = 30$ και $\nu_5 = 20$ και να συμπληρώσετε τον πίνακα. **(8 μον.)**

Γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων. **(5 μον.)**

Δ. Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων. **(5 μον.)**

Ε. i. Να βρείτε το πλήθος τον παρατηρήσεων που είναι το πολύ 13.

ii. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον ίσες με 14. **(2x2=4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Α. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100m μια ορθογώνια περιοχή της οποίας η μία πλευρά μήκους x είναι τοίχος.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 50x - \frac{1}{2}x^2,\ 0 < x < 100.$$ **(4 μον.)**

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού αυτού. **(3 μον.)**

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει η ορθογώνια περιοχή ώστε το εμβαδόν της να είναι μέγιστο. **(6 μον.)**

Β. Έστω μια ποσοτική μεταβλητή X με τιμές:

$f'(50)$, $f'(48)$, $f'(47)$, $f'(46)$ και $f'(44)$.

i. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων αυτών. **(6 μον.)**

ii. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1°:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Β. Οι μεταβλητές διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές. Οι ποσοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, ενώ οι ποιοτικές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές δεν είναι αριθμοί.
Οι ποσοτικές επιπλέον χωρίζονται σε διακριτές και συνεχείς.
Οι διακριτές είναι οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές είναι μεμονωμένες, διακριτές τιμές, ενώ οι συνεχείς παίρνουν τιμές από ένα διάστημα (α,β).

Γ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$.

Τότε $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{x+h-x}{h}\right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1.$

Δ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ

Ε. i. $(fog)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

ii. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$.

iii. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$, δώσουμε διαφορετική βαρύτητα, με συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, ..., w_\nu$, τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο: $\bar{x} = \dfrac{x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_\nu w_\nu}{w_1 + w_2 + ... + w_\nu}$.

<u>Θέμα 2^{o}</u>:

Α.i. Είναι:

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^3-27}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-x+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-(x-1)^2}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x+1-x^2+2x-1}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{-x^2+3x}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{-x(x-3)}{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=$$

$$\lim_{x\to3}\frac{-x}{\left(x^2+3x+9\right)\left(\sqrt{x+1}+x-1\right)}=\frac{-3}{9\cdot4}=-\frac{1}{12}.$$

ii. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=3$, πρέπει $\lim_{x\to3} f(x)=f(3)\Leftrightarrow$

$$\alpha^2-\frac{25}{12}=-\frac{1}{12}\Leftrightarrow 12\alpha^2-25=-1\Leftrightarrow 12\alpha^2=24\Leftrightarrow \alpha^2=2\Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{2}.$$

Β1.i. Εφόσον η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0=1$. Επίσης, διέρχεται από το σημείο Α(1,-3) άρα θα την επαληθεύει. Οπότε: $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)=-3$.

ii. $$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{13-f(x)}}{2f(x)+4}=\frac{\sqrt{13-\lim_{x\to1} f(x)}}{2\lim_{x\to1} f(x)+4}=\frac{\sqrt{13-(-3)}}{2(-3)+4}=\frac{\sqrt{16}}{-6+4}=\frac{4}{-2}=-2.$$

B2.i. Για να ορίζεται η g πρέπει:

$x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$

και

$x^2-4\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq 4\Leftrightarrow x\neq \pm 2$

Οπότε, $A_g=[1,2)\cup(2,+\infty)$.

ii. Ο ρυθμός μεταβολής της g είναι:

$$g'(x)=\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-4}\right)'=\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)'\left(x^2-4\right)-\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(x^2-4\right)'}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\cdot(x-1)'\cdot\left(x^2-4\right)-\left(\sqrt{x-1}-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$\frac{\frac{x^2-4}{2\sqrt{x-1}}-\frac{\left(2x\sqrt{x-1}-2x\right)\cdot 2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$\frac{\frac{x^2-4-4x\left(\sqrt{x-1}\right)^2-4x\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{\frac{x^2-4-4x(x-1)-4x\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}}{\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$\frac{\frac{x^2-4-4x^2+4x-4x\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}}}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^2-4-4x^2+4x-4x\sqrt{x-1}}{\left(2\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-4\right)^2}=$$

$$\frac{-3x^2-4+4x-4x\sqrt{x-1}}{\left(2\sqrt{x-1}\right)\left(x^2-4\right)^2}.$$

Θέμα 3ο:

Α. Είναι $c = \frac{R}{k} = \frac{10}{5} = 2$.

Β. Το εμβαδό του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 200, οπότε ν=200.

$f_1\% = \frac{\nu_1}{\nu} \cdot 100 = 20\%$, $f_2\% = 30\% \Leftrightarrow \frac{\nu_2}{\nu} = 0,3 \Leftrightarrow \nu_2 = 60$.

Επίσης, Το ποσοστό επί τοις εκατό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι πενταπλάσιο του

$$\lim_{x \to 5} \frac{5x^2 - 30x + 25}{x^2 - 25}.$$

$$f_5\% = 5\lim_{x \to 5} \frac{5x^2 - 30x + 25}{x^2 - 25} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} 5\lim_{x \to 5} \frac{5\left(x^2 - 6x + 5\right)}{(x-5)(x+5)} =$$

$$5\lim_{x \to 5} \frac{5(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+5)} = 5\lim_{x \to 5} \frac{5(x-1)}{(x+5)} = 5 \cdot \frac{20}{10} = 10\%$$

Άρα, $f_5 = \frac{v_5}{v} \Leftrightarrow v_5 = 20$.

Επιπλέον, στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 4η κλάση είναι $\alpha_4 = 54^\circ$, δηλαδή

$\frac{v_4}{v} \cdot 360^\circ = 54^\circ \Leftrightarrow v_4 = \frac{54 \cdot 200}{360} \Leftrightarrow v_4 = 30$. Οπότε $f_4\% = \frac{v_4}{v} \cdot 100 = 15\%$

Τέλος, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = 200 \Leftrightarrow v_3 = 50$. Ο πίνακας γίνεται:

Χρόνος	**x_i**	**v_i**	**$f_i\%$**	**$x_i v_i$**	**$F_i\%$**
$[8,10)$	9	40	20	360	20
$[10,12)$	11	60	30	660	50
$[12,14)$	13	50	25	650	75
$[14,16)$	15	30	15	450	90
$[16,18)$	17	20	10	340	100
Σύνολο	**-**	**200**	**100**	**2460**	**-**

Γ. Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι : $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i v_i}{v} = \dfrac{2460}{200} = \dfrac{123}{10}$.

Δ. Για τη διάμεσο των παρατηρήσεων παρατηρούμε ότι $F_2\%=50\%$, άρα η διάμεσος είναι δ=12.

Ε.i. Το πλήθος τον παρατηρήσεων που είναι το πολύ 13 είναι:

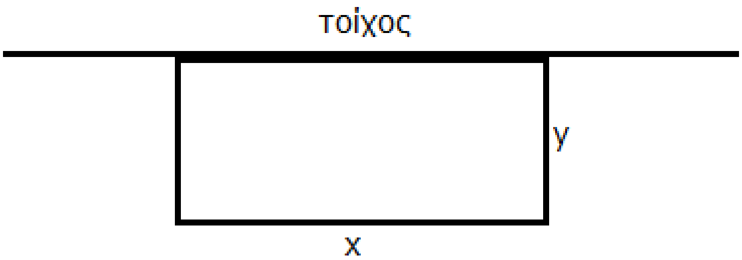
$$v_1 + v_2 + \frac{1}{2}v_3 = 40 + 60 + 25 = 125.$$

ii. Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι τουλάχιστον ίσες με 14 είναι $f_4\% + f_5\% = 15\% + 10\% = 25\%$.

<u>Θέμα 4</u>

Θέμα 4ο:

Α.i.



Έστω x το μήκος της βάσης του παραλληλογράμμου και y το πλάτος του. Τότε: $\Pi = 100 \Leftrightarrow x + 2y = 100 \Leftrightarrow 2y = 100 - x \Leftrightarrow y = 50 - \frac{x}{2}$.

Άρα, $f(x) = x\left(50 - \frac{x}{2}\right) = 50x - \frac{x^2}{2}, x \in (0,100)$

ii. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$f'(x) = 50 - x$.

iii. Λύνουμε την εξίσωση:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x = 0 \Leftrightarrow x = 50$.

Ο πίνακας προσήμων της f΄ είναι:

x	0		50		100
f '	‖	+	0	-	‖
f	‖	↗		↘	‖

Ο.Μ.

Το εμβαδό γίνεται μέγιστο, όταν x=50 και y=25.

Β. i. $f'(50) = 50 - 50 = 0$.

$f'(48) = 50 - 48 = 2$.

$f'(47) = 50 - 47 = 3$.

$f'(46) = 50 - 46 = 4$.

$f'(44) = 50 - 44 = 6$.

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών είναι:

$$\bar{x} = \frac{0+2+3+4+6}{5} = \frac{15}{5} = 3.$$

Για τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά 0, 2, 3, 4, 6 και εφόσον ν=5(περιττός) η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση δηλαδή δ=3.

ii. Η διακύμανση είναι:

$$s^2 = \frac{\Sigma\left(t_i - \bar{x}\right)^2}{\nu} =$$

$$\frac{(0-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (6-3)^2}{5} =$$

$$\frac{9+1+0+1+9}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Τότε η τυπική απόκλιση είναι s=2 και ο συντελεστής μεταβολής $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{3} > \frac{10}{100}$. Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.