ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

12

Ον/μο:……………….. **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

Ύλη: Διαφορικός Λογισμός, Στατιστική **14-02-16**

<u>Θέμα 1^o</u>:

Α. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται συνεχής; **(7 μον.)**

Β. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής X, ενός δείγματος μεγέθους ν με $\kappa \leq \nu$.

i. Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i; **(4 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, ..., \kappa$. **(3 μον.)**

iii. Να αποδείξετε ότι: $f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$. **(3 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών μεταβλητών. **Σ Λ**

ii. $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. **Σ Λ**

iii. $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. **Σ Λ**

iv. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. **Σ Λ**

(4x1=4 μον.)

Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

i. Η συχνότητα ν_i είναι πάντοτε ένας ………… αριθμός.

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και ……… τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = ...$.

iii. $(x \cdot \eta\mu x)' = ...$.

iv. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ……………… μεταβλητών.

(4x1=4 μον.)

Θέμα 2ο:

Η βαθμολογία 20 φοιτητών στις εξετάσεις ενός μαθήματος είναι:

5	9	7	9	7	5	7	7	9	5
7	4	9	5	7	5	4	7	5	5

Α. Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων (απόλυτων και αθροιστικών). **(7 μον.)**

Β. i. Να βρείτε πόσοι φοιτητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 5 αλλά το πολύ 7. **(3 μον.)**

ii. Να βρείτε το ποσοστό των φοιτητών που πήρε βαθμό το πολύ 7. **(3 μον.)**

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήρε βαθμό τουλάχιστον 5. **(3 μον.)**

Γ. i. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. **(5 μον.)**

ii. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα. **(4 μον.)**

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{2x-4}, & x\neq 2\\ \dfrac{\alpha^2}{2}+\alpha, & x=2\end{cases}$

i. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$. **(5 μον.)**

ii. Να βρείτε το α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. **(5 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=-x^4+6x^2-8x+1$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(3 μον.)**

ii. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(7 μον.)**

iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $M(1,g(1))$. **(5 μον.)**

<u>Θέμα 4</u>^{o}:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που παριστάνει τις θερμοκρασίες ενός χωριού για 50 συνεχόμενες ημέρες του χειμώνα.

x_i	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
2	20					
3						
4	15					
5						
Σύνολο						

Αν η συχνότητα ν_2 ισούται με το $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}-22\right)$ και η συχνότητα ν_4 είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=x^2-6x+14$. Τότε :

Α. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα. **(15 μον.)**

Β. Ποιο είναι το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία ήταν πάνω από $3^{\circ}\mathrm{C}$; **(4 μον.)**

Γ. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέγεται συνεχής όταν για κάθε $x_0 \in A$, ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Β. i. Αν διαιρέσουμε τη συχνότητα ν_i με το μέγεθος ν του δείγματος προκύπτει η **σχετική συχνότητα f_i** της τιμής x_i, δηλαδή

$$f_i = \frac{\nu_i}{\nu}, \quad i = 1, 2, ..., k.$$

ii. Για i=1,2,...,k είναι $0 \le \nu_i \le \nu \Rightarrow \frac{0}{\nu} \le \frac{\nu_i}{\nu} \le \frac{\nu}{\nu} \Rightarrow 0 \le f_i \le 1.$

iii. Είναι $f_1 + f_2 + ... + f_k = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + ... + \frac{\nu_k}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_k}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$

Γ. i. Λ **ii.** Σ **iii.** Λ **iv.** Λ

Δ. i. Η συχνότητα ν_i είναι πάντοτε ένας **θετικός** αριθμός.

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ και $l_1 \ge 0$ τότε: $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{l_1}$.

iii. $(x \cdot \eta\mu x)' = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x$.

iv. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο **ποιοτικών** μεταβλητών.

Θέμα 2ο:

Α.

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$	α_i
4	2	2	0,1	0,1	10	10	36^o
5	7	9	0,35	0,45	35	45	126^o
7	7	16	0,35	0,8	35	80	126^o
9	4	20	0,2	1	20	100	72^o
Σύνολο	**20**	**-**	**1**	**-**	**100**	**-**	**360^o**

Είναι: $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$

$N_1 = \nu_1$, $N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1$, $F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

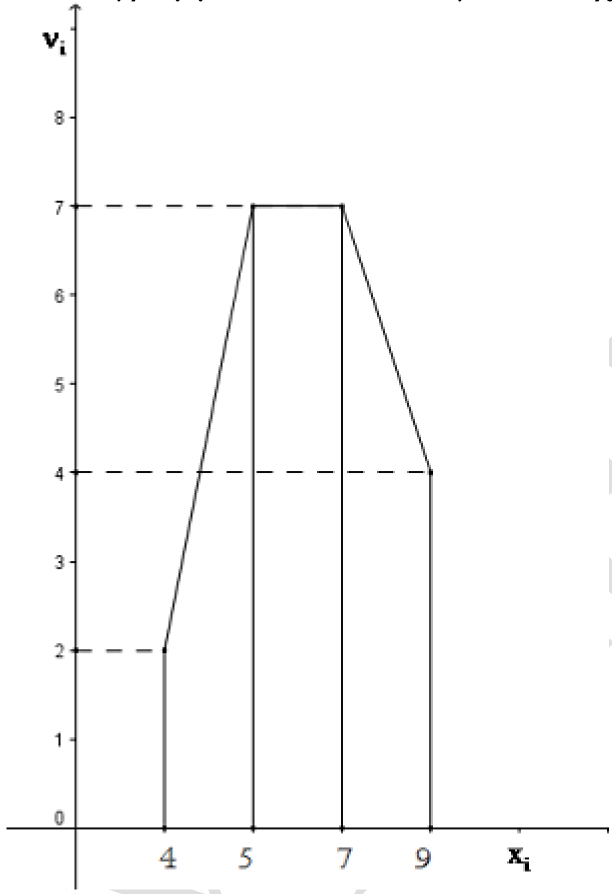
$F_i\% = F_i \cdot 100.$

Β. i. Οι φοιτητές που πήραν βαθμό τουλάχιστον 5 αλλά το πολύ 7 είναι $\nu_2 + \nu_3 = 7 + 7 = 14$.

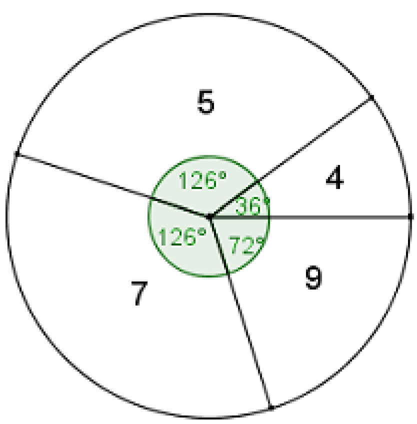
ii. Το ποσοστό των φοιτητών που πήρε βαθμό το πολύ 7 είναι $F_3\% = 80\%$.

iii. Το ποσοστό των φοιτητών που πήρε βαθμό τουλάχιστον 5 είναι $100\% - f_1\% = 100\% - 10\% = 90\%$.

Γ. i. Το διάγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων είναι:



ii. Για το κυκλικό διάγραμμα βρίσκουμε τους αντίστοιχους κυκλικούς τομείς $\alpha_i = 360^\circ \cdot f_i$.



Θέμα 3ο:

Α. i. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{2x-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{3}{2}$, όπου

για το x^2-x-2, έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9>0$

και $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{array}\right.$, οπότε

$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

ii. Για να είναι η f συνεχής στο 2 πρέπει:

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{2}+\alpha=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha=3\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-3=0$.

Η εξίσωση έχει Δ=4+12=16>0, άρα έχει δύο άνισες ρίζες τις:

$\alpha_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-2\pm 4}{2}=\left\langle \begin{array}{l} \alpha_1=-3 \\ \alpha_2=1 \end{array}\right.$. Δηλαδή α=-3 ή α=1.

Β. Έχουμε την $g(x)=-x^4+6x^2-8x+1$.

i. Η g έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$.

ii. Βρίσκουμε την παράγωγο της g που είναι:

$g'(x)=-4x^3+12x-8,\ x\in\mathbb{R}$.

Βρίσκουμε τις ρίζες της g'. Δηλαδή:

$g'(x)=0\Leftrightarrow -4x^3+12x-8=0\overset{:(-4)}{\Leftrightarrow} x^3-3x+2=0$ (1)

Από σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε:

1 ↓	0 1	-3 1	2 -2	1
1	1	-2	0	

Τότε από την (1) έχουμε $(x-1)(x^2+x-2)=0$ δηλαδή **x=1** ή

$x^2+x-2=0$ που έχει Δ=1+8=9>0 άρα 2 άνισες λύσεις τις

$x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{array}\right.$

Ο πίνακας προσήμων της g' είναι:

x	$-\infty$	-2		1		$+\infty$
g'	+	0	-	0	-	
g	↗		↘		↘	

Ο.Μ.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-2,-1]$ και $[1,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό μέγιστο για x=-2 το g(-2)=25.

iii. Είναι $g(1)=-1^4+6\cdot 1^2-8\cdot 1+1=-1+6-8+1=-2$,

$$g'(1)=-4\cdot 1^3+12\cdot 1-8=-4+12-8=0.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο M(1,g(1)) είναι

$y-g(1)=g'(1)(x-1)\Rightarrow y+2=0\Rightarrow y=-2.$

<u>Θέμα 4^o:</u>

Α. Είναι $$\nu_2=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}-22\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}-22\right)=$$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}-22\right)=\lim_{x\to 4}\left((x+4)(\sqrt{x}+2)-22\right)=$$

$$8\cdot 4-22=32-22=10.$$

Για την ν_4 έχουμε: $f(x)=x^2-6x+14,\ x\in\mathbb{R}.$

→ Βρίσκουμε την f'. Είναι: $f'(x)=2x-6,\ x\in\mathbb{R}.$

→ Βρίσκουμε τις ρίζες της f'. $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3.$

→ Ο πίνακας προσήμων της f' είναι:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f'	-		+
f	↘		↗

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=3 το f(3)=9-18+14=5.

Άρα ν_4=5. Ο πίνακας γίνεται:

x_i	ν_i	N_i	f_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
2	20	20	0,4	0,4	40	40
3	10	30	0,2	0,6	20	60
4	15	45	0,3	0,9	30	90
5	5	50	0,1	1	10	100
Σύνολο	**50**	**-**	**1**	**-**	**100**	**-**

Είναι: $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, $f_i\% = \frac{\nu_i}{\nu} \cdot 100$

$N_1 = \nu_1$, $N_2 = N_1 + \nu_2$ κ.ο.κ.

$F_1 = f_1$, $F_2 = F_1 + f_2$ κ.ο.κ.

$F_i\% = F_i \cdot 100$.

Β. Το ποσοστό των ημερών που η θερμοκρασία ήταν πάνω από $3^\circ C$ είναι $f_3\% + f_4\% = 30\% + 10\% = 40\%$.

Γ. Το διάγραμμα σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό είναι: