ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

12

Ύλη:Διανύσματα **Β΄ Λυκείου**

Ον/μο:………………… **Θετ.-Τεχν. Κατ.**

2 -11– 2014

<u>ΘΕΜΑ Α</u> :

Α1.

1.Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, λ_1,λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα, και θ η γωνία τους να αποδείξετε ότι:

α) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\lambda_1\cdot\lambda_2=-1$ **(μον.4)**

β) $συνθ=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$. **(μον.4)**

2.Αν $\vec{\alpha}=(3,x)$ και $\vec{\beta}=(10,6)$ να προσδιοριστεί ο x ώστε τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να είναι κάθετα. **(μον.2)**

3.Να βρεθεί αν η γωνία θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}=\left(1,\sqrt{3}\right)$ και $\vec{\beta}=\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$ είναι οξεία ή αμβλεία. Στη συνέχεια να βρείτε τη γωνία. **(μον.6)**

Α2.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(3,2)$, $\vec{v}=(4,-6)$, $\vec{w}=(-3,-2)$. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in R$ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u}+\lambda\vec{w}$ να είναι κάθετο στο $\vec{v}$. **(μον.4)**

2. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Μ είναι το μέσο της ΑΒ.Αν $\vec{A\Delta}=\vec{\alpha}$, $\vec{\Delta\Gamma}=\vec{\beta}$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{\Delta M},\vec{M\Gamma},\vec{A\Gamma}$ και $\vec{\Delta B}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. **(μον.5)**

ΘΕΜΑ Β :

Β1

1.Για τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OM}$ του μέσου Μ του τμήματος $\vec{AB}$ να δείξετε ότι $\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$. **(5 μον.)**

2.Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ,να αποδείξετε ότι
$\vec{AB}+\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{MN}$. **(5 μον.)**

Β2.

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα

1. Αν $x\cdot\vec{\alpha}+y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$,να δείξετε ότι $x=y=0$.

2. Αν $x_1\cdot\vec{\alpha}+y_1\cdot\vec{\beta}=x_2\cdot\vec{\alpha}+y_2\cdot\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

3.Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\cdot\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. **(15 μον.)**

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1.

1.Για δύο διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ να δείξετε ότι:
$\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ **(8 μον.)**

Πότε ισχύουν τα $=$ της προηγούμενης ανισότητας.

2. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ισχύει $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{5}$ να αποδείξετε ότι: **α)** $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ **β)** $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$. **(10 μον.)**

Γ2.

3. Αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα του επιπέδου με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}=2$ να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$. **(7 μον.)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>:

Δ1.

1. Τρία πλοία Α,Β και Γ αναχωρούν ταυτόχρονα από ένα λιμάνι. Η θέση του λιμανιού θεωρείται ως αρχή ενός ορθοκανονικού συστήματος και οι θέσεις των πλοίων, συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες είναι $A(t^2+t,\ t^2)$, $B(-2t,\ -t^2-2t)$ και $\Gamma(t,\ -t^2-1)$. Τρείς ώρες μετά ένα άλλο πλοίο Π που η θέση του εκείνη τη στιγμή ικανοποιεί τη σχέση $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}=3\vec{O\Pi}$ εκπέμπει σήμα SOS. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες του πλοίου που εκπέμπει σήμα SOS. **(μον.5)**

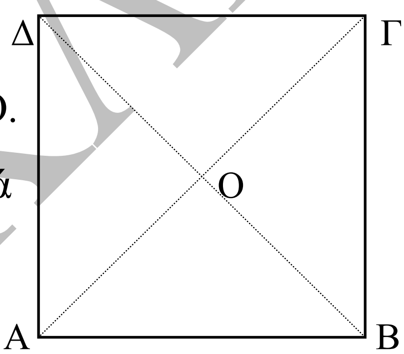
β) Ποιο απ’ τα τρία πλοία Α,Β και Γ βρίσκεται πλησιέστερα στο πλοίο που εκπέμπει SOS, ώστε να σπεύσει σε βοήθεια; **(μον.5)**

γ) Αν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία οι θέσεις των πλοίων Α, Β και Γ είναι συνευθειακά σημεία. **(μον.5)**

Δ2.

1.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α=2 και κέντρου Ο. Αντιστοιχίστε τα εσωτερικά γινόμενα της στήλης Α με τις αντίστοιχες τιμές της στήλης Β.



Α	**Β**
1. $\vec{OA}\cdot\vec{O\Delta}$	-4
2. $\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma A}$	-2
3. $\vec{B\Delta}\cdot\vec{O\Delta}$	4
4. $\vec{AB}\cdot\vec{AO}$	0
5. $\vec{BA}\cdot\vec{O\Gamma}$	2

(Αιτιολογημένες απαντήσεις) **(μον.5)**

2.

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το ύψος του.

Δείξτε(διανυσματικά) ότι αν $\hat{A}=90^\circ$ τότε $\left|\vec{AB}\right|^2=\vec{B\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}$. **(μον.5)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

<u>ΘΕΜΑ Α</u> :

Α1.

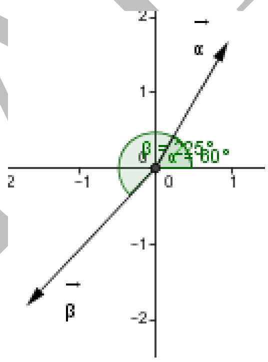
1. Θεωρία

2.Τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα αν $\lambda_{\vec{\alpha}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$ δηλ. $\dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{6}{10} = -1 \Leftrightarrow x = -5$.

3.Είναι: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3})}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \dfrac{-3 - \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{6}}$,αρνητικός αριθμός οπότε η θ είναι αμβλεία γωνία.

Είναι $\lambda_{\vec{\alpha}} = \sqrt{3}$ και η διανυσματική του ακτίνα στο 1^o τεταρτημόριο άρα $\theta_{\vec{\alpha}} = 60^o$.

Επίσης $\lambda_{\vec{\beta}} = 1$ και η διανυσματική του ακτίνα στο 3^o τεταρτημόριο άρα $\theta_{\vec{\beta}} = 180^o + 45^o = 225^o$.



Η θ λοιπόν είναι $\theta = 30^o + 90^o + 45^o = 165^o$

Α2.

1. Εχουμε: $\vec{u} + \lambda\vec{w} = (3,2) + \lambda(-3,-2) = (-3\lambda + 3, -2\lambda + 2)$.

Για να είναι τα διανύσματα $\vec{u} + \lambda\vec{w}$ και $\vec{v}$ κάθετα αρκεί

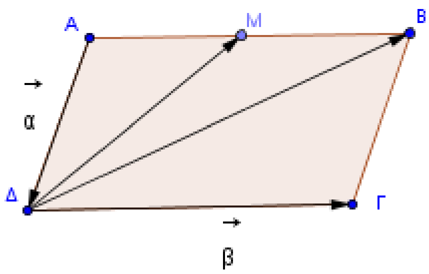
$(\vec{u} + \lambda w) \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow$

$(-3\lambda + 3, -2\lambda + 2) \cdot (4,-6) = 0 \Leftrightarrow (-3\lambda + 3) \cdot 4 + (-2\lambda + 2) \cdot (-6) = 0$

$\Leftrightarrow -12\lambda + 12 + 12\lambda - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ που ισχύει για κάθε λ.

2.Εχουμε:

- $\overrightarrow{\Delta M} = \overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AM} = -\vec{\alpha} + \dfrac{\vec{\beta}}{2}$
- $\overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \dfrac{\vec{\beta}}{2} + \vec{\alpha}$
- $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$
- $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Delta\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$



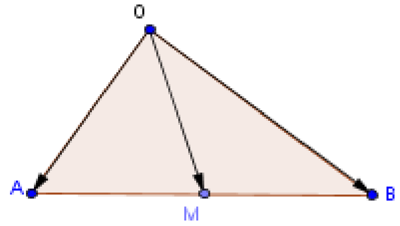
<u>ΘΕΜΑ Β</u> :

Β1.

1.Εχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}\end{array}\right| \overset{(+)}{\Rightarrow} 2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$$

άρα $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$

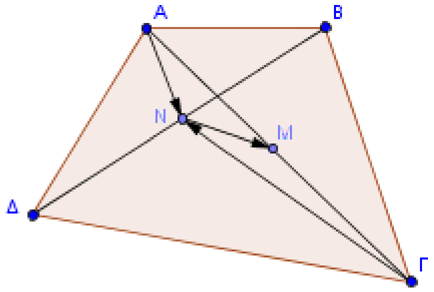


2.Εχουμε:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{\Gamma N}\overset{AB\Delta}{\underset{\Gamma B\Delta}{===}}$$

$$2(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{\Gamma N})=-2\cdot(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{N\Gamma})\overset{A\Gamma N}{===}$$

$$-2\cdot 2\overrightarrow{NM}=4\overrightarrow{MN}$$



Β2.

1.Εστω ότι κάποιος απ' τους x, y δεν είναι 0, π.χ. $x\neq 0$. Τότε:

$$x\cdot\vec{\alpha}+y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow x\cdot\vec{\alpha}=-y\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=-\frac{y}{x}\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$$, άτοπο.

Αρα x=0 οπότε η $x\cdot\vec{\alpha}+y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}$ γίνεται

$0\cdot\vec{\alpha}+y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow y\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow y=0$ γιατί $\vec{\beta}\neq\vec{0}$.

2.Εχουμε:

$$x_1\cdot\vec{\alpha}+y_1\cdot\vec{\beta}=x_2\cdot\vec{\alpha}+y_2\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow x_1\cdot\vec{\alpha}-x_2\cdot\vec{\alpha}+y_1\cdot\vec{\beta}-y_2\cdot\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$(x_1-x_2)\cdot\vec{\alpha}+(y_1-y_2)\vec{\beta}=\vec{0}\Leftrightarrow x_1-x_2=0$ και $y_1-y_2=0$ αφού τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, οπότε $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

3. Τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda\in R:\vec{u}=\lambda\vec{v}\Leftrightarrow$

$$(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\lambda[(2+3x)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}]\Leftrightarrow(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\lambda(2+3x)\vec{\alpha}-2\lambda\vec{\beta}$$

και επειδή $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά είναι:

$$\left.\begin{array}{c} x-1=\lambda(2+3x) \\ 1=-2\lambda \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-1=-\dfrac{1}{2}(2+3x) \\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow x=0$$

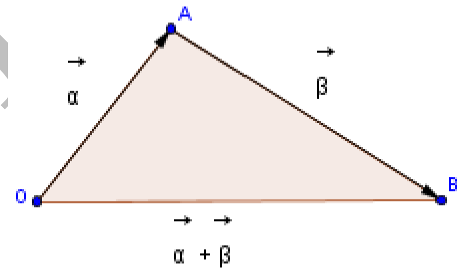
<u>ΘΕΜΑ Γ</u> :

Γ1.

1.

Στο σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε οτι $|(OA)-(AB)|<(OB)<(OA)+(AB)$

και επομένως $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|<|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|<|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

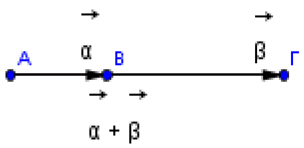


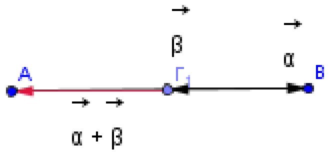
•Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

•Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

Σχήμα:

$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta},\ \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha},\ \overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta},\ \overrightarrow{A\Gamma}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$





Σχόλιο: Η απόδειξη γίνεται και με ύψωση των ισοτήτων στο τετράγωνο.

2. Εστω

α) $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{2}=\dfrac{|\vec{\beta}|}{3}=\dfrac{|\vec{\gamma}|}{5}=\lambda$ οπότε $|\vec{\alpha}|=2\lambda,\ |\vec{\beta}|=3\lambda,\ |\vec{\gamma}|=5\lambda$ άρα $|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=5\lambda$

Αφού $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma}\Rightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-\vec{\gamma}|\Rightarrow|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=5\lambda$

Αρα $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ οπότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

β) Αφού $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, υπάρχει κ>0 ώστε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$. Η ισότητα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, γράφεται $\kappa\vec{\beta} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa\vec{\beta} + \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow (\kappa+1)\vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Leftrightarrow$

$$\vec{\beta} = -\frac{1}{\kappa+1}\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\beta} \uparrow\downarrow \vec{\gamma}.$$

Γ2.

1. Αφού

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) + |\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = 2 \Leftrightarrow 1\cdot 1\cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) + 1\cdot 1\cdot \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = 2$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) + \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = 2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) = \sigma\upsilon\nu(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = 1$

άρα $(\vec{\alpha}\hat{\ }\vec{\beta}) = 0^o$ και $(\vec{\beta}\hat{\ }\vec{\gamma}) = 0^o$**.** Είναι λοιπόν

$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \uparrow\uparrow \vec{\gamma}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ οπότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u> :

Δ1.

α) Τρείς ώρες μετά τα τρία πλοία βρίσκονται στις θέσεις Α(12,9), Β(-6,-15) και Γ(3,-10). Αν η θέση του πλοίου Π είναι Π(x,y) τότε η ισότητα $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = 3\vec{O\Pi}$ γράφεται:

(12,9)+(-6,-15)+(3,-10)=(3x,3y) $\Rightarrow$ (9,-16)=(3x,3y) άρα $\Pi(3,-\frac{16}{3})$.

β) Οι αποστάσεις των πλοίων Α,Β,Γ από το πλοίο Π είναι:

$$A\Pi = \sqrt{(3-12)^2 + (-\frac{16}{3}-9)^2} = \sqrt{81 + \frac{43^2}{9}} = \sqrt{\frac{2707}{9}}$$

$$B\Pi = \sqrt{(3+6)^2 + (-\frac{16}{3}+15)^2} = \sqrt{81 + \frac{29^2}{9}} = \sqrt{\frac{1570}{9}} \text{ και}$$

$$\Gamma\Pi = \sqrt{(3-3)^2 + (-\frac{16}{3}+10)^2} = \sqrt{\frac{24^2}{9}} = \sqrt{\frac{576}{9}}.$$

Το πλοίο που θα σπεύσει για βοήθεια είναι το Γ.

γ)Είναι:

$$\overrightarrow{BA}=(t^2+t+2t,t^2+t^2+2t)=(t^2+3t,2t^2+2t) \text{ και}$$

$$\overrightarrow{\Gamma A}=(t^2+t-t,t^2+t^2+1)=(t^2,2t^2+1) \text{ και:}$$

$$\det(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{\Gamma A})=\begin{vmatrix} t^2+3t & 2t^2+2t \\ t^2 & 2t^2+1 \end{vmatrix}=4t^3+t^2+3t=t(4t^2+t+3)$$

Το τριώνυμο $4t^2+t+3$ έχει Δ=-47<0 άρα δεν μηδενίζεται για κανένα t.
Τα σημεία λοιπόν Α, Β, Γ δεν είναι για καμία χρονική στιγμή συνευθειακά

Δ2.

1.

- $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O\Delta}=0$ γιατί $OA\perp O\Delta$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=-2^2=-4$
- $\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{O\Delta}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$
- $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{AB}\cdot\dfrac{\overrightarrow{A\Gamma}}{2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=-2$

2.

Εχουμε:

$$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B})=$$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\overset{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{A\Gamma}}{====}$$

$$=0+\overrightarrow{\Gamma B}\cdot \pi\rho o\beta_{\overrightarrow{\Gamma B}}\overrightarrow{AB}=$$

$$=\overrightarrow{\Gamma B}\cdot\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$$