ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **113**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα **05-10-19**

Θέμα 1^{ο}:

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x + \beta y = \gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή . **(8μον.)**

Β. Πότε ένα σύστημα 2x2 λέγεται μη γραμμικό; **(7μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σωστό** ή **(Λ)** **Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα ομογενές σύστημα 3x3 έχει μοναδική λύση την $(x,y,z)=(0,0,0)$. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{array}{l}\alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{array}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις . **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases} xy=32 \\ x+y=12 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ -4x+6y=-10 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις . **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{3}+\dfrac{-y+3}{6}=1 \\ -\dfrac{x+3}{3}+\dfrac{2x+y}{4}=\dfrac{y-3}{3} \end{array}\right\}$. **(10μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=6 \\ \sqrt{x-1}-3\sqrt{y+2}=-4 \end{array}\right\}$. **(7μον.)**

Γ. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+2y-3z&=2\\ 2x+3y-2z&=3\end{aligned}\right\}$. **(8μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α.Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{aligned} x+y&=6\\ y+z&=-4\\ z+x&=20\end{aligned}\right\}$. **(8μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{aligned} x+y&=7\\ x\cdot y&=10\end{aligned}\right\}$.

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(7μον.)**

Γ. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y, ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι: $D^2+4D_x^2+D_y^2=8D-12D_x+2D_y-26$.Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και στη συνέχεια να τη βρείτε. **(10 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να βρεθεί ένας τριψήφιος φυσικός αριθμός αν :

- * Το άθροισμα των ψηφίων του είναι 21.
- * Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 9,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο τελευταίων ψηφίων του.
- * Ο αριθμός ελαττώνεται κατά 90,στην περίπτωση που αλλάξει η θέση των δύο πρώτων ψηφίων του. **(10μον.)**

Β.Να βρεθεί η τιμή του $\mu\in\mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα

$(\Sigma)\ \left.\begin{aligned} (\mu-1)x-2y&=\mu\\ 6x-(\mu-2)y&=4\end{aligned}\right\}$ είναι αδύνατο. **(15μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

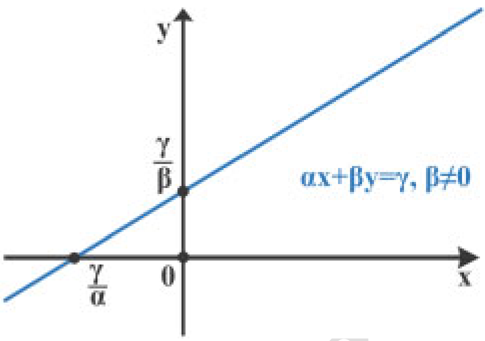
● Αν $\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει

συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

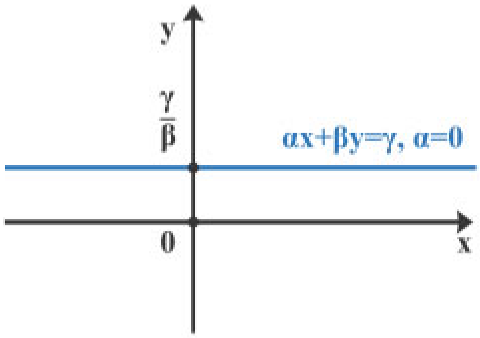
→ Αν $\alpha\neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .



→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και

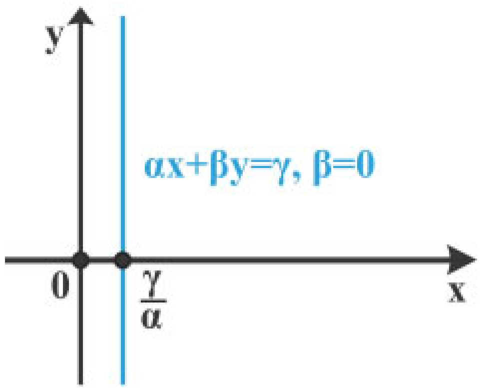
επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον

άξονα x΄x και τέμνει τον y΄y στο $\frac{\gamma}{\beta}$.



● Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον y΄y στο $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.



Β. Ένα σύστημα 2x2 λέγεται μη γραμμικό όταν τουλάχιστον μία από τις δύο εξισώσεις του, δεν είναι γραμμική.

Β. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

<u>**Θέμα 2^{o}:**</u>

Α.Έχουμε :

$$\left.\begin{aligned}\frac{x-1}{3}+\frac{-y+3}{6}&=1\\ -\frac{x+3}{3}+\frac{2x+y}{4}&=\frac{y-3}{3}\end{aligned}\right\}\underset{\cdot 12}{\overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow}}\left.\begin{aligned}2(x-1)+(-y+3)&=6\\ -4(x+3)+3(2x+y)&=4(y-3)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}2x-2-y+3&=6\\ -4x-12+6x+3y&=4y-12\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2x-y&=5\\ 2x-y&=0\end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο.

Β. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} 2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=6 \\ \sqrt{x-1}-3\sqrt{y+2}=-4 \end{array}\right\}(\Sigma)$.

Πρέπει κατ΄αρχάς $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$ και $y+2\neq 0 \Leftrightarrow y\neq -2$.

Θέτουμε $\sqrt{x-1}=\omega$ και $\sqrt{y+2}=\varphi$ και το (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{l} 2\omega+\varphi=6 \\ \omega-3\varphi=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi=6-2\omega \\ \omega-3(6-2\omega)=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi=6-2\omega \\ \omega-18+6\omega=-4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi=6-2\omega \\ 7\omega=14 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \varphi=6-4 \\ \omega=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi=2 \\ \omega=2 \end{pmatrix}.$$

Οπότε $\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow x-1=4 \Leftrightarrow x=5$ και

$\sqrt{y+2}=2 \Leftrightarrow y+2=4 \Leftrightarrow y=2$. Επομένως η λύση του συστήματος είναι (x,y)=(5,2).

Γ. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{array}{ll} x+y+z=1 & (1) \\ x+2y-3z=2 & (2) \\ 2x+3y-2z=3 & (3) \end{array}\right\}$

Η $(1) \Rightarrow x=1-y-z$ (4)

$$\left.\begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array}\right\} \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{l} 1-y-z+2y-3z=2 \\ 2-2y-2z+3y-2z=3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y-4z=1 \\ y-4z=1 \end{array}\right\}.$$

Το σύστημα των (2) και (3) έχει άπειρες λύσεις, οπότε και το αρχικό σύστημα θα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y,z)=(-5z,1+4z,z),\ z\in\mathbb{R}$.

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. i. $\begin{cases} x+y=6 & (1) \\ y+z=-4 & (2) \\ z+x=20 & (3) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) , (3) και προκύπτει :

$$2x+2y+2z=22 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+z=11 \ (4)$$

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

- (4)-(1) $\Rightarrow x+y+z-(x+y)=11-6 \Leftrightarrow z=5$
- (4)-(2) $\Rightarrow x+y+z-(y+z)=11+4 \Leftrightarrow x=15$

- (4)-(3) $\Rightarrow x+y+z-(z+x)=11-20 \Leftrightarrow y=-9$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι (x,y,z)=(15,-9,5).

Β. Έχουμε : $\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x\cdot y=10 \end{array}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 7 και γινόμενο 10. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-7\omega+10=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=2 ή ω=5 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (2,5) ή (5,2) .

Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Γ. Είναι: $D^2+4D_x^2+D_y^2=8D-12D_x+2D_y-26 \Leftrightarrow$

$D^2+4D_x^2+D_y^2-8D+12D_x-2D_y+26=0 \Leftrightarrow$

$D^2-8D+16+4D_x^2+12D_x+9+D_y^2-2D_y+1=0 \Leftrightarrow$

$(D-4)^2+(2D_x+3)^2+(D_y-1)^2=0$

Εφόσον $D\neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(-\frac{3}{8},\frac{1}{4}\right)$.

<u>Θέμα 4^o:</u>

Α. Έστω x, y, z τα ψηφία του αριθμού. Τότε έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 100x+10y+z-9=100x+10z+y \\ 100x+10y+z-90=100y+10x+z \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=21 \\ 9y-9z=9 \\ 90x-90y=90 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} x+y+z=21 & (1) \\ y-z=1 & (2) \\ x-y=1 & (3) \end{array}\right\}$$

Προσθέτουμε τις (1), (2), (3) κατά μέλη και προκύπτει $2x+y=23$ (4).

$$\left.\begin{matrix}(4)\\(3)\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}2x+y=23\\x-y=1\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix}3x=24\\x-y=1\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}x=8\\y=7\end{matrix}\right\}.$$

Για x=8 και y=7 έχουμε ότι z=6. Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι το 876.

B. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}(\mu-1)x-2y=\mu\\6x-(\mu-2)y=4\end{matrix}\right\}$

Θα βρούμε την ορίζουσα του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix}\mu-1 & -2\\ 6 & 2-\mu\end{vmatrix}=(\mu-1)(2-\mu)+12=-\mu^2+3\mu+10=-(\mu-5)(\mu+2).$$

Για να είναι το (Σ) αδύνατο πρέπει κατ' αρχάς:
$D=0 \Leftrightarrow \mu=5$ ή $\mu=-2$.

*Αν μ=5 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{matrix}4x-2y=5\\6x-3y=4\end{matrix}\right\} \underset{:3}{\overset{:2}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{matrix}2x-y=\frac{5}{2}\\2x-y=\frac{4}{3}\end{matrix}\right\}$

δηλαδή είναι αδύνατο.

*Αν μ=-2 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{matrix}-3x-2y=-2\\6x+4y=4\end{matrix}\right\} \underset{:2}{\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}} \left.\begin{matrix}3x+2y=2\\3x+2y=2\end{matrix}\right\}$

δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο για μ=5.