ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **112**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα **06-10-18**

Θέμα 1^{ο}:

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha\neq 0$ ή $\beta\neq 0$, παριστάνει ευθεία γραμμή . **(8 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους; **(7 μον.)**

Γ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ένα ομογενές σύστημα είναι αδύνατο. **Σ Λ**

ii. Αν για το σύστημα $\left.\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha' x+\beta' y=\gamma'\end{matrix}\right\}$ ισχύει ότι $D=0$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο . **Σ Λ**

iii. Το σύστημα $\begin{cases}xy=1\\ x+y=0\end{cases}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\begin{cases}x-y=8\\ \dfrac{1}{2}x-0,5y=4\end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις . **Σ Λ**

v. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2x2 έχει 2 λύσεις, τότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. **Σ Λ**

(5x2=10μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}\dfrac{2x+1}{5}+\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{3}{5}\\ \dfrac{3(x-1)}{7}+\dfrac{2(1-y)}{21}=\dfrac{4}{21}\end{matrix}\right\}$.

(10 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{matrix}2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}=6\\ \sqrt{x-1}-3\sqrt{y+2}=-4\end{matrix}\right\}$.

(7 μον.)

Γ. Να λύσετε το σύστημα: $\left.\begin{array}{l} 2x+y+z=3 \\ x-y+z=0 \\ 3x-2y+2z=-1 \end{array}\right\}.$

(8 μον.)

<u>Θέμα 3ο:</u>

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=4 \\ y+z=-8 \\ z+x=12 \end{array}\right\}.$

(8 μον.)

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{array}\right\}.$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα . **(7 μον.)**

Γ. Για τις ορίζουσες D, D_x, D_y, ενός γραμμικού συστήματος 2x2 ισχύει ότι: $D^2+D_x^2+D_y^2=4D-6D_x+2D_y-14$.Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και στη συνέχεια να τη βρείτε. **(10 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Να βρεθούν δύο ακέραιοι αριθμοί που να διαφέρουν κατά 11 και η διαίρεση του μεγαλύτερου διά τον μικρότερο να δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 1. **(10 μον.)**

Β.i. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα

$(\Sigma)\ \left.\begin{array}{l} (\lambda-2)x+3y=1 \\ (\lambda-2)x+\lambda y=1 \end{array}\right\}$ έχει άπειρες λύσεις. **(8 μον.)**

ii. Αν το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις, να βρεθεί ποια από αυτές, είναι λύση της εξίσωσης 2x-y=-5. **(7 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. i. $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

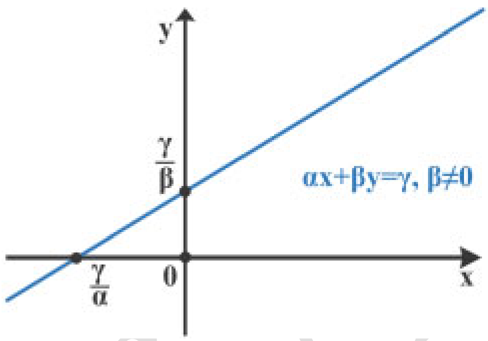
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

● Αν $\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση γράφεται :

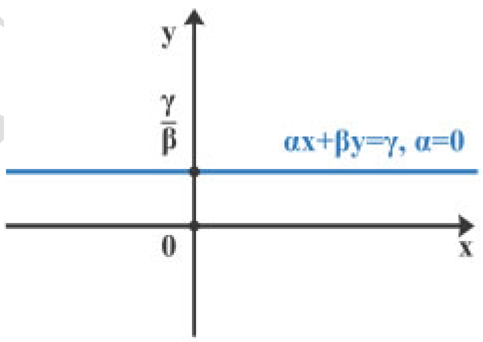
$$\alpha x+\beta y=\gamma \Leftrightarrow \beta y=-\alpha x+\gamma \Leftrightarrow y=\frac{-\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$$

επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$ και τέμνει τον $y'y$ στο $\frac{\gamma}{\beta}$.

→ Αν $\alpha \neq 0$, τότε η ευθεία τέμνει και τους δύο άξονες .

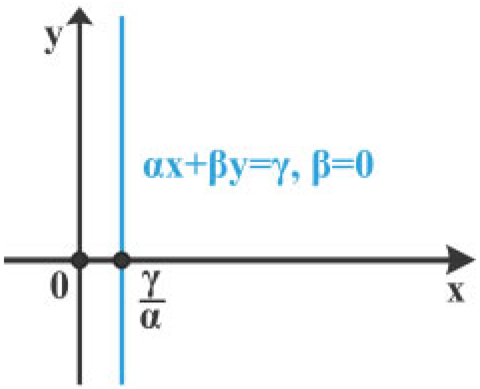


→ Αν α=0 , τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y=\frac{\gamma}{\beta}$ και επομένως παριστάνει ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο $\frac{\gamma}{\beta}$.



- Αν β=0 , τότε η εξίσωση γράφεται : $\alpha x=\gamma \Leftrightarrow x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$

  Επομένως η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y΄y και τέμνει τον x΄x στο $\dfrac{\gamma}{\alpha}$.



Β. Όταν έχουμε τρεις γραμμικές εξισώσεις με τρεις αγνώστους: $\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\delta_1$, $\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\delta_2$ και $\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z=\delta_3$ και ζητάμε τις κοινές λύσεις τους, τότε λέμε ότι έχουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους ή πιο σύντομα, ένα γραμμικό σύστημα 3x3 και γράφουμε:

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z=\delta_1\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z=\delta_2\\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z=\delta_3\end{aligned}\right\}.$$

Β. i.Λ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Έχουμε :

$$\left.\begin{aligned}\frac{2x+1}{5}+\frac{y+1}{10}=\frac{3}{5}\\ \frac{3(x-1)}{7}+\frac{2(1-y)}{21}=\frac{4}{21}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\frac{2x+1}{5}+\frac{y+1}{10}=\frac{3}{5}\\ \frac{3x-3}{7}+\frac{2-2y}{21}=\frac{4}{21}\end{aligned}\right\}\overset{\cdot 10}{\underset{\cdot 21}{\Leftrightarrow}}$$

$$\left.\begin{aligned}10\cdot\frac{2x+1}{5}+10\cdot\frac{y+1}{10}&=10\cdot\frac{3}{5}\\21\cdot\frac{3x-3}{7}+21\cdot\frac{2-2y}{21}&=21\cdot\frac{4}{21}\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2(2x+1)+y+1&=2\cdot3\\3(3x-3)+2-2y&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}4x+2+y+1&=6\\9x-9+2-2y&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}4x+y&=3\\9x-2y&=11\end{aligned}\right\}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}8x+2y&=6\\9x-2y&=11\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{aligned}17x&=17\\4x+y&=3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}x&=1\\4+y&=3\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x=1\\y=-1\end{pmatrix}.$$

Άρα (x,y)=(1,-1).

Β. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{aligned}2\sqrt{x-1}+\sqrt{y+2}&=6\\\sqrt{x-1}-3\sqrt{y+2}&=-4\end{aligned}\right\}$ (Σ).

Πρέπει κατ΄αρχάς $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$ και $y+2\geq 0\Leftrightarrow y\geq -2$.

Θέτουμε $\sqrt{x-1}=\omega$ και $\sqrt{y+2}=\varphi$ και το (Σ) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned}2\omega+\varphi&=6\\\omega-3\varphi&=-4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\varphi&=6-2\omega\\\omega-3(6-2\omega)&=-4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\varphi&=6-2\omega\\\omega-18+6\omega&=-4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=6-2\omega\\7\omega&=14\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\varphi&=6-4\\\omega&=2\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\varphi=2\\\omega=2\end{pmatrix}.$$

Οπότε $\sqrt{x-1}=2\Leftrightarrow x-1=4\Leftrightarrow x=5$ και $\sqrt{y+2}=2\Leftrightarrow y+2=4\Leftrightarrow y=2$. Επομένως η λύση του συστήματος είναι (x,y)=(5,2).

Γ. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{aligned}2x+y+z&=3 &&(1)\\x-y+z&=0 &&(2)\\3x-2y+2z&=-1 &&(3)\end{aligned}\right\}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και προκύπτει: $3x+2z=3(4)$.

Επίσης είναι:

$$\left.\begin{aligned}x-y+z&=0\\3x-2y+2z&=-1\end{aligned}\right\}\overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{aligned}-2x+2y-2z&=0\\3x-2y+2z&=-1\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}x=-1.$$

Οπότε αντικαθιστούμε στην (4), όπου x=-1 και έχουμε:
$-3+2z=3 \Leftrightarrow 2z=6 \Rightarrow z=3$.
Τέλος αντικαθιστούμε στην (2) όπου x=-1 και z=3 και προκύπτει:
$-1-y+3=0 \Leftrightarrow y=2$.Επομένως η λύση του συστήματος είναι
$(x,y,z)=(-1,2,3)$.

Θέμα 3^{o}:

Α. i. $\begin{cases} x+y=4 & (1) \\ y+z=-8 & (2) \\ z+x=12 & (3) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) , (2) , (3) και προκύπτει :

$2x+2y+2z=8 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x+y+z=4 \ (4)$

Αφαιρούμε από την (4) διαδοχικά τις (1) , (2) , (3) και έχουμε :

- (4)-(1) $\Rightarrow$ $x+y+z-(x+y)=4-4 \Leftrightarrow z=0$
- (4)-(2) $\Rightarrow$ $x+y+z-(y+z)=4+8 \Leftrightarrow x=12$
- (4)-(3) $\Rightarrow$ $x+y+z-(z+x)=4-12 \Leftrightarrow y=-8$

Οπότε η λύση του συστήματος είναι (x,y,z)=(12,-8,0).

Β. Έχουμε : $\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x\cdot y=4 \end{matrix}\right\}$

Αναζητούμε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 4. Επομένως , από τους τύπους του Vieta οι αριθμοί αυτοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-5\omega+4=0$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι ω=1 ή ω=4 . Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι τα ζεύγη (1,4) ή (4,1) .
Γεωμετρικά , έχουμε ότι η ευθεία και η υπερβολή τέμνονται σε 2 σημεία .

Γ. Είναι: $D^2+D_x^2+D_y^2=4D-6D_x+2D_y-14 \Leftrightarrow$

$D^2+D_x^2+D_y^2-4D+6D_x-2D_y+14=0 \Leftrightarrow$

$D^2-4D+4+D_x^2+6D_x+9+D_y^2-2D_y+1=0 \Leftrightarrow$

$(D-2)^2+(D_x+3)^2+(D_y-1)^2=0 \Leftrightarrow D=2$ και $D_x=-3$ και $D_y=1$.

Εφόσον $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right).$$

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Έστω x και y οι ζητούμενοι αριθμοί και έστω x>y. Εφόσον οι αριθμοί διαφέρουν κατά 11 θα είναι x-y=11 **(1)** . Επίσης, η μορφή της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι $\Delta=\delta\cdot\pi+\upsilon$ οπότε για τους αριθμούς x και y έχουμε x=2y+1 **(2)** . Οι **(1)** και **(2)** ορίζουν το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}x-y&=11\\x&=2y+1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2y+1-y&=11\\x&=2y+1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=10\\x&=21\end{aligned}\right\}$$

. Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι 10 και 21.

Β. i. Έχουμε το σύστημα : $\left.\begin{aligned}(\lambda-2)x+3y&=1\\(\lambda-2)x+\lambda y&=1\end{aligned}\right\}$

Θα βρούμε την ορίζουσα του συστήματος . Είναι :

$$D=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 3\\ \lambda-2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)-3(\lambda-2)=(\lambda-2)(\lambda-3).$$

Για να έχει το (Σ) άπειρο πλήθος λύσεων πρέπει κατ' αρχάς $D=0\Leftrightarrow\lambda=2$ ή $\lambda=3$.

*Αν λ=2 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{aligned}0x+3y&=1\\0x+2y&=1\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}\\y&=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}$ δηλαδή είναι αδύνατο.

*Αν λ=3 το σύστημα γίνεται $\left.\begin{aligned}x+3y&=1\\x+3y&=1\end{aligned}\right\}$ δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(x,y)=(1-3y,y), y\in\mathbb{R}$.

Οπότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις για λ=3.

ii. Οι λύσεις του (Σ) είναι της μορφής $\left(x,y\right)=\left(1-3y,y\right),y\in\mathbb{R}$.

Για να είναι και σημείο της ευθείας 2x-y=-5 πρέπει να την επαληθεύει. Δηλαδή:

$$2x-y=-5\Leftrightarrow 2\left(1-3y\right)-y=-5\Leftrightarrow 2-6y-y=-5\Leftrightarrow -7y=-7$$

$$\Leftrightarrow y=1.$$

Για y=1 είναι x=1-3y=1-3=-2. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι (x,y)=(-2,1).