ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **110**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία **09-12-17**

Θέμα 1^{ο}:

Α.i. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιοδική στο Α; **(5 μον.)**

ii. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$. **(10 μον.)**

Β. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** Σωστό ή **(Λ)** Λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

i. Η συνάρτηση $f:[-3,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=4x^2$ είναι άρτια. **Σ Λ**

ii. Το σύστημα $\left.\begin{aligned}(\eta\mu\theta)x+(\sigma\upsilon\nu\theta)y=-5\\(\sigma\upsilon\nu\theta)x-(\eta\mu\theta)y=9\end{aligned}\right\}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$. **Σ Λ**

iii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ Λ**

iv. Η $f(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. **Σ Λ**

v. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$. **Σ Λ**

(5x2=10 μον.)

Θέμα 2^{ο}:

Α. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{aligned}(\eta\mu\theta)x+y=2\\x+\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)y=4\end{aligned}\right\}$ για τις διάφορες τιμές του θ, με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. **(10 μον.)**

Β. Να λύσετε το σύστημα : $\left.\begin{aligned}x+y=2\\x^2+y^2=20\end{aligned}\right\}$

Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **(10 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Γ. Ο Περικλής, κορυφαία προσωπικότητα του αρχαίου Ελληνικού κόσμου, ασχολήθηκε με τα κοινά της Αθήνας από την ηλικία των 30 ετών μέχρι τον θάνατό του. Αν είχε ζήσει έναν χρόνο περισσότερο, θα είχε ασχοληθεί με τα κοινά τη μισή ζωή του. Πόσα χρόνια έζησε και πόσα ασχολήθηκε με τα κοινά; **(5 μον.)**

Θέμα 3^{o}:

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
iv. Να εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες.

(4x3=12 μον.)

Β. Έστω οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f\left(x\right)=x^3$ και $g\left(x\right)=x^3-3x^2+3x-7$.

i. Να βρείτε πόσες μονάδες κατακορύφως και πόσες οριζοντίως, έχει μετατοπιστεί η C_g σε σχέση με την C_f .

ii. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες. **(2x2=4 μον.)**

Γ. Να παραστήσετε γραφικά την $f\left(x\right)=3ημ2x-1$ στο $\left[0,2\pi\right]$. **(9 μον.)**

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2ημx$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

ii. Ποια είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης και ποια η ελάχιστη και για ποιες τιμές του x παίρνει αυτές τις τιμές;

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)+ημ^2x=3+συν^2x$.

iv. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$A=\frac{f(8\pi-x)f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)f\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)f(7\pi+x)}{f^2\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)f^2(x)}$$

είναι ανεξάρτητη του x. **(4x4=16 μον.)**

Β. Να λύσετε την εξίσωση $εφ\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=σφ\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ στο $[0,2\pi)$. **(9 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

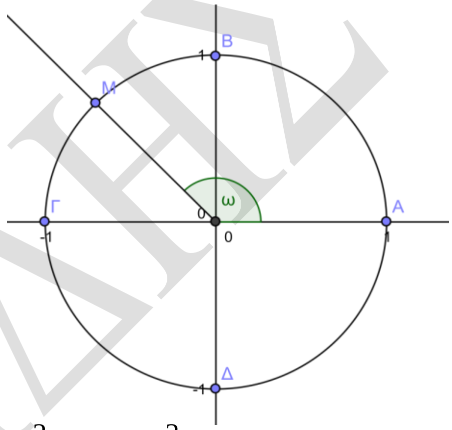
Θέμα 1^o:

Α. i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

α. $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

β. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.



iii. Αν Μ(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο , τότε θα είναι : $x = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $y=\eta\mu\omega$

Επειδή όμως , (ΟΜ)=1 και

$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

θα ισχύει : $x^2 + y^2 = 1$ οπότε θα έχουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$.

Β. i.Λ **ii.**Σ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Σ

Θέμα 2^o:

Α. Έχουμε το σύστημα: $\left.\begin{aligned} (\eta\mu\theta)x + y = 2 \\ x + \left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)y = 4 \end{aligned}\right\}$ (Σ).

Βρίσκουμε τις ορίζουσες του (Σ):

$$D = \begin{vmatrix} \eta\mu\theta & 1 \\ 1 & \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \end{vmatrix} = \eta\mu\theta \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} - 1 = \varepsilon\varphi\theta - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta} - 4 = \frac{2 - 4\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$D_y=\begin{vmatrix}\eta\mu\theta & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4\eta\mu\theta-2$$

$\rightarrow$ Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta-1\neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta\neq 1 \overset{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \theta\neq\frac{\pi}{4}$ τότε το (Σ) έχει

μοναδική λύση την $(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{\frac{2-4\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\varepsilon\varphi\theta-1},\frac{4\eta\mu\theta-2}{\varepsilon\varphi\theta-1}\right)=$

$\left(\frac{2-4\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta(\varepsilon\varphi\theta-1)},\frac{4\eta\mu\theta-2}{\varepsilon\varphi\theta-1}\right)$.

$\rightarrow$ Αν $D=0\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$ τότε είναι $D_y=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2=2\sqrt{2}-2\neq 0$,

επομένως το (Σ) είναι αδύνατο.

Β. $\left.\begin{matrix}x+y=2\\ x^2+y^2=20\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=2-x\\ x^2+(x-2)^2=20\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=2-x\\ x^2+x^2-4x+4=20\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\left.\begin{matrix}y=2-x\\ 2x^2-4x-16=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=2-x\\ x^2-2x-8=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=2-x\\ x=-2 \text{ ή } x=4\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix}y=4\\ x=-2\end{pmatrix}$ ή $\begin{pmatrix}y=-2\\ x=4\end{pmatrix}$

Η ευθεία και ο κύκλος τέμνονται σε 2 σημεία.

Γ. Έστω ότι έζησε x χρόνια και ασχολήθηκε με τα κοινά y χρόνια.
Αφού άρχισε να ασχολείται με τα κοινά σε ηλικία 30 ετών, είναι y=x-30. Αν είχε ζήσει ένα χρόνο ακόμα, θα είχε ζήσει x+1 χρόνια και θα είχε ασχοληθεί με τα κοινά y+1 χρόνια , άρα $\frac{x+1}{2}=y+1$.

Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix}y=x-30\\ \frac{x+1}{2}=y+1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=x-30\\ x+1=2y+2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}y=x-30\\ x+1=2x-60+2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}y=29\\ x=59\end{matrix}\right\}.$$

Άρα έζησε 59 χρόνια και πολιτεύτηκε επί 29 χρόνια.

Θέμα 3ο:

A. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

i. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$\underbrace{1-x^2\geq 0}_{x=1 \text{ ή } x=-1} \overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow} -1\leq x\leq 1$. Οπότε: $A=[-1,1]$.

ii. $\rightarrow$ Έστω $x_1,x_2\in[-1,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2>x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2<1-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1-x_1^2}<\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα.

$\rightarrow$ Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^2<x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2 \Leftrightarrow 1-x_1^2>1-x_2^2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{1-x_1^2}>\sqrt{1-x_2^2} \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$.

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

iii. Είναι: $x^2\geq 0 \Leftrightarrow -x^2\leq 0 \Leftrightarrow 1-x^2\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq 1$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 1 για x=0.
Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pm 1$ το y=0.

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[-1,1]$. Οπότε
$\forall x\in A$ το $-x\in A$. Επίσης,

$\mathbf{f(-x)}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=\mathbf{f(x)}$. Άρα η f είναι άρτια.

B. Έχουμε τις συναρτήσεις f, g με $f(x)=x^3$ και $g(x)=x^3-3x^2+3x-7$ που ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$.

i. Είναι: $g(x)=x^3-3x^2+3x-7=x^3-3x^2+3x-1-6=(x-1)^3-6$, επομένως η γραφική παράσταση της g είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα δεξιά και 6 μονάδες κάτω.

ii. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, τότε: $\mathbf{x_1<x_2} \Leftrightarrow x_1^3<x_2^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Το ίδιο θα ισχύει και για την g εφόσον η γραφική της παράσταση είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f.

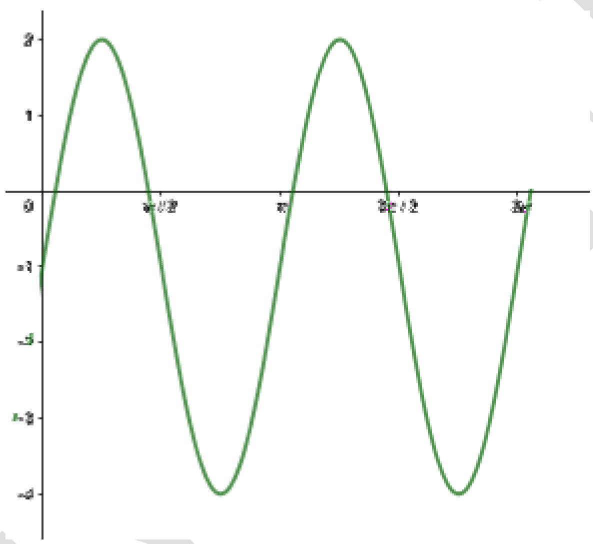
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Γ. i. Η $g(x) = 3\eta\mu 2x - 1$ έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ και βήμα

$\beta = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$. Ο πίνακας τιμών της είναι:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημ2x	0	1	0	-1	0
3ημ2x	0	3	0	-3	0
3ημ2x-1	-1	2	-1	-4	-1

Η γραφική παράσταση της g είναι:



Θέμα 4ο:

Α.i. Η $f(x)=2\eta\mu x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $[-2,2]$, εφόσον $-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow -2\le \eta\mu x\le 2$.

ii. Η f έχει μέγιστη τιμή το 2 και ελάχιστη το -2.

Τη μέγιστη τιμή την παίρνει όταν:

$$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}\ .$$

Την ελάχιστη τιμή την παίρνει όταν:

$$\eta\mu x=-1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2} \text{ ή } x=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\ \ \kappa\in\mathbb{Z}\ .$$

iii. $f(x)+\eta\mu^2x=3+\sigma\upsilon\nu^2x \Leftrightarrow 2\eta\mu x+\eta\mu^2x=3+\sigma\upsilon\nu^2x \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2x-\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x-3=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x-1+\eta\mu^2x+2\eta\mu x-3=0 \Leftrightarrow$

$2\eta\mu^2x+2\eta\mu x-4=0 \Leftrightarrow \eta\mu^2x+\eta\mu x-2=0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$

ή

$\eta\mu x=-2$ αδύνατη.

iv.

$$A=\frac{f(8\pi-x)f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)f\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)f(7\pi+x)}{f^2\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)f^2(x)}$$

$$A=\frac{2\eta\mu(8\pi-x)2\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)2\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)2\eta\mu(7\pi+x)}{4\eta\mu^2\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)4\eta\mu^2(x)}$$

$$A=\frac{-16\eta\mu x\cdot(-\sigma\upsilon\nu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot(-\eta\mu x)}{16\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu^2x}=-1$$

Β. Έχουμε την: $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$ (1)

Πρέπει: $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x\neq \kappa\pi+\frac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$

και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\neq 0\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x\neq\kappa\pi\Leftrightarrow x\neq\kappa\pi-\frac{\pi}{3},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

Τότε η $(1)\Rightarrow$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\varepsilon\varphi\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]\Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+x=\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-x\Leftrightarrow$$

$$3\pi+12x=12\kappa\pi+2\pi-12x\Leftrightarrow 24x=12\kappa\pi-\pi\Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{24},\ \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Όμως, $0\leq x<2\pi\Leftrightarrow 0\leq\frac{\kappa\pi}{2}-\frac{\pi}{24}<2\pi\Leftrightarrow 0\leq 12\kappa\pi-\pi<48\pi\Leftrightarrow$

$$\pi\leq 12\kappa\pi<49\pi\Leftrightarrow 1\leq 12\kappa<49\Leftrightarrow \frac{1}{12}\leq\kappa<\frac{49}{12}\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Rightarrow}\kappa=0,1,2,3,4.$$

Οπότε για κ=1,2,3,4 οι ζητούμενες λύσεις είναι:

$$x=\frac{11\pi}{24}\ \text{ή}\ x=\frac{23\pi}{24}\ \text{ή}\ x=\frac{35\pi}{24}\ \text{ή}\ x=\frac{47\pi}{24}\ .$$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ