# ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**11**

**Ον/μο:………………..** **Γ' Λυκείου(ΕΠΑ.Λ)**

**Ύλη: Όριο και Συνέχεια Συνάρτησης** **01-11-15**

**Θέμα 1$^{o}$:**

**Α.** Τι ονομάζουμε συνάρτηση; **(6 μον.)**

**Β**. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; **(5 μον.)**

**Γ.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

**i.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται ………… αν …………. ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**ii.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{……………… .}$$

**iii.** Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ ορίζεται όταν …………. . **(3x2=6 μον.)**

**Δ.** Να χαρακτηρίσετε με **(Σ)** **Σ**ωστό ή **(Λ)** **Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

**i.** Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

**ii.** Η συνάρτηση $f(x) = \etaμx$ είναι γνησίως μονότονη. **Σ Λ**

**iii.** $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right) = 5$. **Σ Λ**

**iv.** Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$ είναι συνεχής στο 2. **Σ Λ**

**(4x2=8 μον.)**

**Θέμα 2$^o$:**

**A.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2x}{4x^2-1}$.

**i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. **(4 μον.)**

**ii.** Να βρείτε τις τιμές $f(0),\ f(-2),\ f(4)$. **(3 μον.)**

**iii.** Αν $g(x)=\sqrt{f(x)}$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της g. **(6 μον.)**

**B.** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x-1$ και $g(x)=x^2+2x$.

**i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f και g. **(2 μον.)**

**ii.** Να βρείτε τη συνάρτηση $(f\cdot g)(x)$. **(5 μον.)**

**iii.** Να λύσετε την εξίσωση $(f\cdot g)(x)=0$. **(5 μον.)**

**Θέμα 3$^o$:**

**A.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^4+1\right)\left(x^3-2\right)^2\right]$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to \pi}\left(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right)$.

**iii.** $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+5x+2}{x^3-x}$.

**iv.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

**v.** $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{9}{x+3}\right)$. **(5x3=15 μον.)**

**B.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x$. να υπολογίσετε τα όρια:

**i.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-9}$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2-\sqrt{x+4}}$. **(2x5=10 μον.)**

**Θέμα 4$^{ο}$:**

**Α.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2-x}, & x\neq 0 \text{ και } x\neq 1\\ 2, & x=1\end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$. **(12 μον.)**

**Β.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-8x+12}{x-6}, & x\neq 6\\ 3\alpha-5, & x=6\end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η f να είναι συνεχής στο 6. **(13 μον.)**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

## Απαντήσεις (ενδεικτικές)

**Θέμα 1ο:**

**Α.** Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β είναι η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του συνόλου Α, αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή του συνόλου Β.

**Β.** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

**Γ. i.** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται **συνεχής** αν **για κάθε $x_0 \in A$** ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

**ii.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2$ τότε:

$$\mathbf{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}, l_2 \neq 0}\ .$$

**iii.** Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ έχουν πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\frac{f(x)}{g(x)}$ ορίζεται όταν $\mathbf{x \in A}$ **και** $\mathbf{g(x) \neq 0}$ .

**Δ.** **i.** Λ **ii.** Λ **iii.** Σ **iv.** Σ

**Θέμα 2ο:**

**Α. i.** Για να ορίζεται η f πρέπει:

$$4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 4x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}.\ \text{Άρα } A_f = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}.$$

**ii.** $f(0) = \dfrac{2\cdot 0}{4\cdot 0^2 - 1} = 0$

$$f(-2) = \frac{2\cdot(-2)}{4\cdot(-2)^2 - 1} = -\frac{4}{15}$$

$$f(4) = \frac{2\cdot 4}{4\cdot 4^2 - 1} = \frac{8}{63}$$

**iii.** Είναι $g(x)=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\dfrac{2x}{4x^2-1}}$.

Πρέπει : $x\neq\pm\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{2x}{4x^2-1}\geq 0\Leftrightarrow 2x\left(4x^2-1\right)\geq 0(1)$.

$\rightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

$\rightarrow 4x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$

Ο πίνακας προσήμων της g είναι:

| **x** | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x | - | ‖ | - | | + | ‖ | + | |
| $4x^2-1$ | + | ‖ | - | | - | ‖ | + | |
| g(x) | - | ‖ | + | | - | ‖ | + | |

Άρα $A_g=\left(-\dfrac{1}{2},0\right]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

**Β. i.** Είναι $A_f=\mathbb{R}$ και $A_g=\mathbb{R}$.

**ii.** Η συνάρτηση $f\cdot g$ έχει πεδίο ορισμού το $A_f\cap A_g=\mathbb{R}$ και είναι:

$f(x)\cdot g(x)=(x-1)\left(x^2+2x\right)=x^3+2x^2-x^2-2x=x^3+x^2-2x$.

**iii.** $f(x)\cdot g(x)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2+2x=0$

Δηλαδή $x=1$ ή $x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$.

**<u>Θέμα 3ο</u>:**

**Α. i.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(x^4+1\right)\left(x^3-2\right)^2\right]=\left(0^4+1\right)\left(0^3-2\right)^2=1\cdot 4=4$.

**ii.** $\lim\limits_{x\to\pi}\left(2\eta\mu x+3\sigma\upsilon\nu x\right)=2\eta\mu\pi+3\sigma\upsilon\nu\pi=2\cdot 0+3\cdot(-1)=-3$.

**iii.** $$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+5x+2}{x^3-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to -1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}{x(x-1)}=\frac{3\left(-1+\frac{2}{3}\right)}{-1(-1-1)}=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Όπου για το $3x^2+5x+2$ έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1>0$ και

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-5\pm 1}{6}=\begin{cases}-1\\ -\frac{2}{3}\end{cases}.$$

**iv.** $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**v.** $$\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{9}{x+3}\right)=\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=$$

$$\lim_{x\to -3}(x-3)=-6.$$

**B. i.** $$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x^2-9}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x}{(x+3)}=\frac{1}{2}.$$

**ii.** $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{2-\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x}{2-\sqrt{x+4}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{2^2-\left(\sqrt{x+4}\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{4-x-4}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{-x}=\lim_{x\to 0}\left[-(x-3)\left(2+\sqrt{x+4}\right)\right]=12.$$

**<u>Θέμα 4ο</u>:**

**Α.** Έχουμε την $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2-x}, & x\neq 0 \text{ και } x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$.

Για να είναι η f συνεχής στο 1 πρέπει $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Είναι:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{x}=2.$$

Επίσης, $f(1)=2$. Επομένως η f είναι συνεχής στο 1.

**Β.** Έχουμε την $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-8x+12}{x-6}, & x\neq 6 \\ 3\alpha-5, & x=6 \end{cases}$.

Για να είναι η f συνεχής στο 6 πρέπει $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=f(6)$. Είναι:

$$\lim_{x\to 6} f(x)=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-8x+12}{x-6}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-2)}{x-6}=\lim_{x\to 6}(x-2)=4.$$

Όπου για το $x^2-8x+12$ έχουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=64-48=16>0$ και

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\pm 4}{2}=\left\langle\begin{matrix}6\\2\end{matrix}\right..$$

Επίσης, $f(6)=3\alpha-5$. Άρα πρέπει: $3\alpha-5=4\Leftrightarrow 3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=3$.