ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

109

Ον/μο:……………….. **Β΄ Λυκείου**

Ύλη:Συστήματα-Συναρτήσεις **7-10-2017**

ΘΕΜΑ Α

Α1. 1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση; **(μον.3)**

2. Τί ονομάζουμε σύνολο τιμών συνάρτησης; **(μον.3)**

3. Αν είναι γνωστή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τι γνωρίζετε για την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$\bullet\, f(x-c),\ c\in R$ $\quad\bullet\, f(x)+c,\ c\in R$ $\quad\bullet\, |f(x)|$ **(μον.6)**

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται γνησίως φθίνουσα; **(μον.3)**

Α3. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σ**ωστό ή **(Λ) Λ**άθος τις παρακάτω προτάσεις :

α. Το σύστημα $\left.\begin{matrix} xy=2 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\}$ είναι αδύνατο. **Σ Λ**

β. Η συνάρτηση $f(x)=-x^2+3x+1$ είναι παραβολή και παρουσιάζει ελάχιστο στην κορυφή της Κ. **Σ Λ**

γ. Η γραφική παράσταση της $f(x)=(x-2)^2+1$ είναι μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x)=x^2$ κατά 2 μονάδες αριστερά και 1 μονάδα πάνω. **Σ Λ**

δ. Το συμμετρικό του σημείου M(x,y) ως προς τον x΄x είναι το $M΄(x,-y)$ **Σ Λ**

ε. Η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ έχει σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ **Σ Λ**

(μον.10)

ΘΕΜΑ Β:

Β1. Να λύσετε το σύστημα $\left.\begin{matrix} xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{matrix}\right\}$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα. **(μον.8)**

Β2. Με 61m συρματόπλεγμα περιφράξαμε ένα ορθογώνιο κατά μήκος ενός τοίχου (η πλευρά κατά μήκος του τοίχου δεν περιφράχθηκε). Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου, αν το εμβαδόν του είναι $450m^2$. **(μον.5)**

Β3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+3)^2-5,\ x\geq -3$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.
γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή.
δ. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

(μον.12)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν είναι συνάρτηση η $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x\leq 1 \\ 3\alpha x-2, & x\geq 1 \end{cases}$ να βρείτε :

α. τον τύπο της f **(μον.4)**

β. τα $f(\sqrt{5}-1),\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\right)$ **(μον.4)**

γ. να λύσετε την εξίσωση f(x)=4 **(μον.4)**

Γ2.Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-9x+8}+\ln(81-x^2)$ **(μον.6)**

2. $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ **(μον.7)**

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Για ποιες τιμές του $x \in R$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13$ βρίσκεται πάνω απ' τον $x'x$; **(μον.8)**

Δ2. Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $f(x) = 2x^4 + 5x$ και $g(x)=5x^3 + 2$ **(μον.7)**

Δ3. Να βρεθούν οι τιμές του ακέραιου λ ώστε η $f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x \le \lambda\ln\lambda \\ 2e^x - 3, & x \ge 2\ln\lambda \end{cases}$ να είναι συνάρτηση. **(μον.10)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απαντήσεις (Ενδεικτικές)

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1, Α2 Θεωρια

Α3. Σ, Λ, Λ, Σ, Λ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Εχουμε: $\left.\begin{array}{r} xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} xy=2 \\ (x+y)^2-2xy=5 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} xy=2 \\ (x+y)^2=9 \end{array}\right| \Leftrightarrow$

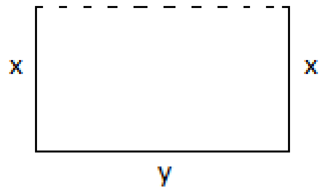
$\left.\begin{array}{r} xy=2 \\ x+y=-3 \end{array}\right| (\Sigma_1)$ ή $\left.\begin{array}{r} xy=2 \\ x+y=3 \end{array}\right| (\Sigma_2)$.

Οι λύσεις του (Σ_1) είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2+3\omega+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \omega=-1$ ή $\omega=-2$ άρα $(x,y)=(-1,-2)$ ή $(x,y)=(-2,-1)$.

Οι λύσεις του (Σ_2) είναι λύσεις της εξίσωσης $\omega^2-3\omega+2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \omega=1$ ή $\omega=2$ άρα $(x,y)=(1,2)$ ή $(x,y)=(2,1)$.

Γραφικά οι λύσεις αυτές παριστάνουν τα κοινά σημεία των γραμμών $xy=2$ (υπερβολή) και $x^2+y^2=5$ (κύκλος).

Β2. Εχουμε:



$\left.\begin{array}{r} xy=450 \\ 2x+y=61 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} xy=450 \\ y=61-2x\ (1) \end{array}\right| \Rightarrow x\cdot(61-2x)=450 \Leftrightarrow 2x^2-61x+450=0$

άρα $x=\dfrac{61\pm\sqrt{61^2-4\cdot 2\cdot 450}}{4}=\dfrac{61\pm\sqrt{121}}{4}=\dfrac{61\pm 11}{4}$ οπότε $x=18$

ή $x=\dfrac{25}{2}$ Απ' την (1) $\Rightarrow y=61-2\cdot 18=61-36 \Rightarrow$ $y=25$

ή $y=61-2\cdot\dfrac{25}{2}=61-25 \Rightarrow$ $y=36$.

Β3.

α. Εστω

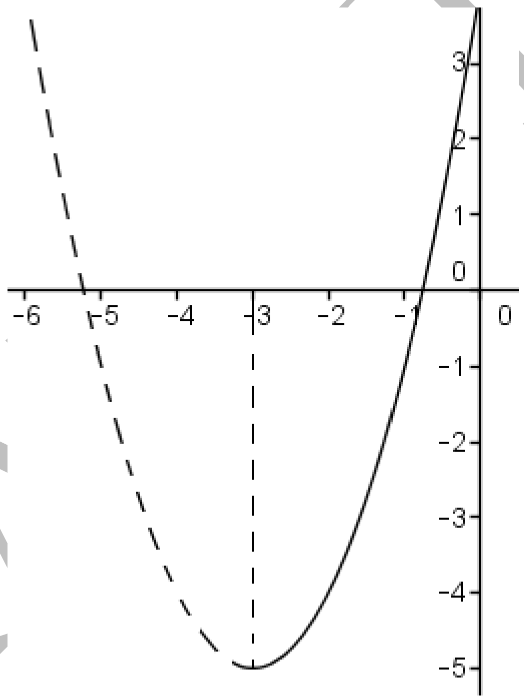
$x_1,\ x_2 \in A=[-3,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+3<x_2+3 \Rightarrow (x_1+3)^2<(x_2+3)^2 \Rightarrow$ $(x_1+3)^2-5<(x_2+3)^2-5 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο A.

β. Είναι:

$x \ge -3 \Rightarrow x+3 \ge 0 \Rightarrow (x+3)^2 \ge 0 \Rightarrow (x+3)^2-5 \ge -5 \Rightarrow f(x) \ge -5$,με το = να ισχύει για $x=-3$. Αρα η f έχει ολικό ελάχιστο το -5 στο -3.

γ. Το πεδίο ορισμού της f δεν είναι συμμετρικό ως προς το O(0,0) οπότε η f δεν είναι άρτια ή περιττή.

δ. Η C_f είναι η του σχήματος:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

α. Για να είναι η f συνάρτηση πρέπει για x=1 οι δύο κλάδοι να δίνουν την ίδια τιμή, άρα πρέπει $\alpha \cdot 1^2 = 3\alpha \cdot 1 - 2 \Leftrightarrow 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Ο τύπος της f είναι: $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 3x-2, & x \ge 1 \end{cases}$.

β. Είναι $\sqrt{5}-1>1$ οπότε $f(\sqrt{5}-1)=3\cdot(\sqrt{5}-1)-2=3\sqrt{5}-5$.

Είναι $\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}<1$ οπότε $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\right)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-1}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1)}\right)^2=$

$=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$.

γ. ●Αν $x \le 1$ η εξίσωση $f(x)=4 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$ άρα $x=-2$.

●Αν $x \ge 1$ η εξίσωση $f(x)=4 \Leftrightarrow 3x-2=4 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow$ $x=2$.

Γ2.

1. Πρέπει

$$\left.\begin{array}{c} x-2\ge 0 \\ x^2-9x+8\ne 0 \\ 81-x^2>0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x\ge 2 \\ x\ne 1 \text{ και } x\ne 8 \\ -9<x<9 \end{array}\right| \Leftrightarrow x\in[2,9)-\{8\}=A_f.$$

2. Πρέπει $\sqrt{x^2+1}-x>0$ που ισχύει $\forall x\in R$ γιατί:

$x^2+1>x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\ge x$ άρα $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0$

Αρα $A_f=R$.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Η f έχει πεδίο ορισμού το A=R και η C_f βρίσκεται πάνω απ’ τον $x'x$ όταν $f(x)>0$.

Πιθανές ακέραιες ρίζες της f είναι οι $\pm 1, \pm 13$. Το 1 είναι ρίζα οπότε κάνω σχήμα Horner γι’ αυτό και η f γράφεται:

$f(x)=(x-1)\cdot(x^3-5x^2+17x-13)$.

Το 1 είναι ρίζα του $x^3-5x^2+17x-13$ και με σχήμα Horner σ’ αυτό ή f γράφεται: $f(x)=(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x^2-4x+13)=(x-1)^2\cdot(x^2-4x+13)$.

Η ανίσωση $f(x)>0$ γράφεται $(x-1)^2\cdot(x^2-4x+13)>0 \Leftrightarrow x\ne 1$ γιατί το τριώνυμο $x^2-4x+13$ είναι θετικό αφού έχει Δ<0.

Η C_f λοιπόν βρίσκεται πάνω απ’ τον $x'x$ όταν $x\ne 1$.

Δ2. Οι f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A=R.Οι τετμημένες των κοινών τους σημείων είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x^4+5x=5x^3+2\Leftrightarrow 2x^4-5x^3+5x-2=0\Leftrightarrow$$

$$2(x^4-1)-5x(x^2-1)=0\Leftrightarrow 2(x^2-1)(x^2+1)-5x(x^2-1)=0\Leftrightarrow$$

$$(x^2-1)[2(x^2+1)-5x]=0\Leftrightarrow(x^2-1)(2x^2-5x+2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=\pm 1\ \text{ή}\ x=2\ \text{ή}\ x=\frac{1}{2}.$$

Οι C_f και C_g λοιπόν έχουν τέσσερα κοινά σημεία τα:

$$K(1,f(1)),\ \Lambda(-1,f(-1)),\ M(2,f(2)),\ N\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Δ3. Αρχικά πρέπει $\lambda\ln\lambda\le 2\ln\lambda\Leftrightarrow\lambda\ln\lambda-2\ln\lambda\le 0\Leftrightarrow\ln\lambda\cdot(\lambda-2)\le 0\Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix}\lambda-2\le 0\ \text{και}\ \ln\lambda\ge 0\\ \lambda-2\ge 0\ \text{και}\ \ln\lambda\le 0\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\lambda\le 2\ \text{και}\ \lambda\ge 1\\ \lambda\ge 2\ \text{και}\ \lambda\le 1\end{matrix}\right|\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}1\le\lambda\le 2\\ \text{αδύνατο}\end{matrix}\right|$$

και επειδή λ ακέραιος είναι λ=1 ή λ=2.

●Αν λ=1 είναι $f(x)=\begin{cases}e^x+1, x\le 0\ \text{και f(0)=2}\\ 2e^x-3, x\ge 0\ \text{και f(0)=}-1\end{cases}$ οπότε η f δεν είναι συνάρτηση.

●Αν λ=2 είναι $f(x)=\begin{cases}e^x+1, x\le 2\ln 2\\ 2e^x-3, x\ge 2\ln 2\end{cases}=\begin{cases}e^x+1, x\le\ln 4\ \text{με f(ln4)=5}\\ 2e^x-3, x\ge\ln 4\ \text{με f(ln4)=5}\end{cases}$

οπότε για λ=2 η f είναι συνάρτηση.