ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **108**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………… **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία - Πολυώνυμα – Εκθετική Συνάρτηση **12-03-17**

Θέμα 1^o:

Α. Ποια συνάρτηση ονομάζεται εκθετική; **(6 μον.)**

Β. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in A$; **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το x-ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Το σύστημα $\left.\begin{aligned}(\eta\mu\theta)x+(\sigma\upsilon\nu\theta)y=4\\ -(\sigma\upsilon\nu\theta)x+(\eta\mu\theta)y=2\end{aligned}\right\}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. **Σ Λ**

ii. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

iii. Η εξίσωση $\eta\mu x=\frac{1}{2}$ έχει άπειρες λύσεις για κάθε $x \in [0,4\pi]$. **Σ Λ**

iv. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=3x^3-2x^2+x-5$ με το x-1 είναι ίσο με -3. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=2^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^o:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3-(\lambda^2-4)x-\lambda+2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. **(7 μον.)**

Β. Να υπολογιστούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο x+1 δίνει υπόλοιπο 1. **(8 μον.)**

Γ. Για λ=1:

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$ τέμνει την $y=3x^2-2$. **(6μον.)**

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$ βρίσκεται κάτω από την $y=3x^2-2$. **(4μον.)**

<u>Θέμα 3ο:</u>

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x-28$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$.

Α. Να βρεθούν οι τιμές των α και β, ώστε το $P(x)$ να έχει ρίζα τον μεγαλύτερο μονοψήφιο πρώτο αριθμό και άθροισμα συντελεστών μηδέν. **(5 μον.)**

Β. Για α=-12 και β=39:

i. Να βρεθούν οι ρίζες x_1,x_2 και x_3 ,με $x_1<x_2<x_3$, της εξίσωσης $P(x)$=0 και να αποδειχθεί ότι: $e^{2x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_3}$. **(8 μον.)**

ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(\sigma\upsilon\nu x)=0$ στο διάστημα $[0,4\pi]$. **(6 μον.)**

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $2^{3x+1}-7\cdot 4^x-3\cdot 2^x=2^{x+1}-4$. **(6 μον.)**

<u>Θέμα 4ο:</u>

Α. Οι ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: x+4y=7$, $\varepsilon_2: x-2y=1$ και $\varepsilon_3: x+y=1$ τέμνονται ανά δύο στα σημεία Α, Β, Γ.

i. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ. **(6 μον.)**

ii. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού του οποίου η γραφική παράσταση να διέρχεται από τα Α(3,1) , Β(1,0) και Γ(-1,2). **(6 μον.)**

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$.

i. Να εξεταστεί αν η f είναι άρτια ή περιττή. **(3 μον.)**

ii. Να δείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο π. **(4 μον.)**

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\sqrt{3}$. **(6 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1°:

Α. Εκθετική ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x)=\alpha^x$, με α>0 και $\alpha \neq 1$.

Β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

Γ. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x). Τότε:

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για x=ρ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του P(x).

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή ισχύει P(ρ)=0.

Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

παίρνουμε $P(x) = (x-\rho)\pi(x)$,

που σημαίνει ότι το x-ρ είναι παράγοντας του P(x).

Δ. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Σ **v.**Λ

Θέμα 2°:

Α. Έχουμε το $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3-(\lambda^2-4)x-\lambda+2,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

* Αν $\lambda^3-4\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq \pm 2$ τότε το πολυώνυμο είναι 3^ου^ βαθμού.

* Αν $\lambda^3-4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2-4) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = \pm 2$ τότε:

$\rightarrow$ Αν λ=0 είναι $P(x)=4x+2$ δηλαδή το πολυώνυμο είναι 1^ου^ βαθμού.

$\rightarrow$ Αν λ=2 είναι $P(x)=0$ δηλαδή το πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

$\rightarrow$ Αν λ=-2 είναι $P(x)=4$ δηλαδή το πολυώνυμο είναι 0^ου^ βαθμού.

Β.

$P(-1)=1 \Leftrightarrow -\lambda^3+4\lambda+\lambda^2-4-\lambda+2=1 \Leftrightarrow -\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-3=0 \Leftrightarrow$

$-\lambda^2(\lambda-1)+3(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(3-\lambda^2)=0 \Leftrightarrow$

$\lambda-1=0 \Leftrightarrow \lambda=1.$

ή

$3-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{3}.$

Γ.i. Για λ=1 είναι $P(x)=-3x^3+3x+1$. Για το κοινό σημείο του $P(x)$ με την $y=3x^2-2$ έχουμε:

$-3x^3+3x+1=3x^2-2 \Leftrightarrow 3x^3+3x^2-3x-3=0 \Leftrightarrow$

$3x^2(x+1)-3(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2-3)=0 \Leftrightarrow$

$3(x+1)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ διπλή ή $x=1$.

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι Α(1,1) και Β(-1,1).

ii. Για να βρίσκεται η γραφική παράσταση του $P(x)$ κάτω από τη\ γραφική παράσταση της $y=3x^2-2$ πρέπει:

$-3x^3+3x+1<3x^2-2 \Leftrightarrow 3x^3+3x^2-3x-3>0$ (1)

Κάνουμε τον πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
Γ	-	0	-	0	+	

Η (1) δίνει: $x\in(1,+\infty)$.

<u>Θέμα 3</u>

A. Ο μεγαλύτερος μονοψήφιος πρώτος αριθμός είναι το 7. Τότε:

$$\left.\begin{matrix}P(7)=0\\P(1)=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}343+49\alpha+7\beta-28=0\\1+\alpha+\beta-28=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix}49\alpha+7\beta=-315\\\alpha+\beta=27\end{matrix}\right\} \overset{:(-7)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{matrix}-7\alpha-\beta=45\\\alpha+\beta=27\end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Leftrightarrow} \left.\begin{matrix}-6\alpha=72\\\alpha+\beta=27\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha=-12\\\beta=39\end{pmatrix}.$$

Β.i. Για α=-12, και β=39 είναι $P(x)=x^3-12x^2+39x-28$.

Λύνουμε την εξίσωση $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-12x^2+39x-28=0$ (1).

Από σχήμα Horner για ρ=1 έχουμε:

1	-12	39	-28	1
↓	1	-11	28	
1	-11	28	0	

Τότε η (1) : $(x-1)(x^2-11x+28)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$ ή $x=7$.

Εφόσον $x_1<x_2<x_3$ και 1<4<7 θα είναι $x_1=1$, $x_2=4$ και $x_3=7$.

Είναι $e^{2x_2}=e^{x_1}\cdot e^{x_3} \Leftrightarrow e^{2\cdot 4}=e^1\cdot e^7 \Leftrightarrow e^8=e^8$ που ισχύει.

ii. $P(\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1$ ή $\sigma\upsilon\nu x=4$ απορ. ή $\sigma\upsilon\nu x=7$ απορ.

Δηλαδή, $\sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow x=2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$. Όμως $x\in[0,4\pi]$ άρα

$0\le x\le 4\pi \Leftrightarrow 0\le 2\kappa\pi\le 4\pi \overset{:2\pi}{\Leftrightarrow} 0\le\kappa\le 2$ και εφόσον ο κ είναι ακέραιος αριθμός οπότε κ=0 ή 1 ή 2.

Για κ=0 είναι x=0, για κ=1 είναι x=π και για κ=2 είναι x=2π.

Γ.

$2^{3x+1}-7\cdot 4^x-3\cdot 2^x=2^{x+1}-4 \Leftrightarrow 2^{3x}\cdot 2-7\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x=2^x\cdot 2-4 \overset{2^x=\omega}{\Leftrightarrow}$

$2\omega^3-7\omega^2-5\omega+4=0$ (1).

Πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης σύμφωνα με το θεώρημα των ακέραιων ριζών είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου δηλαδή $\pm1,\pm2,\pm4$

Από σχήμα Horner για ρ=-1 έχουμε:

2	-7	-5	4	-1
↓	-2	9	-4	
2	-9	4	0	

Τότε η (1): $(\omega+1)(2\omega^2-9\omega+4)=0 \Leftrightarrow$

$\omega+1=0 \Leftrightarrow \omega=-1 \Leftrightarrow 2^x=-1$ αδύνατη.

ή

$2\omega^2-9\omega+4=0$, όπου Δ=49>0, άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες λύσεις τις $\omega_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{9\pm 7}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\omega_1=\dfrac{1}{2}\\ \omega_2=4\end{array}\right.$. Οποτε:

$2^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-1$ ή $2^x=4\Leftrightarrow x=2$.

<u>Θέμα 4ο:</u>

A.i. Για το κοινό σημείο των ε_1, ε_2 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}x+4y=7\\ x-2y=1\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+4y=7\\ -x+2y=-1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}6y=6\\ x+4y=7\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=1\\ x=3\end{pmatrix}.\ \text{Άρα}$$

A(x,y)=(3,1).

Για το κοινό σημείο των ε_2, ε_3 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}x+y=1\\ x-2y=1\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+y=1\\ -x+2y=-1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}3y=0\\ x+y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=0\\ x=1\end{pmatrix}.\ \text{Άρα}$$

B(x,y)=(1,0).

Για το κοινό σημείο των ε_1, ε_3 έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}x+4y=7\\ x+y=1\end{array}\right\}\underset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}x+4y=7\\ -x-y=-1\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\left.\begin{array}{l}3y=6\\ x+y=1\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}y=2\\ x=-1\end{pmatrix}.\ \text{Άρα}$$

Γ(x,y)=(-1,2).

ii. Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού άρα έχει τη μορφή $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$. Εφόσον διέρχεται από τα Α, Β ,Γ θα επαληθεύεται από αυτά. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l}P(3)=1\\ P(1)=0\\ P(-1)=2\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{ll}9\alpha+3\beta+\gamma=1 & (1)\\ \alpha+\beta+\gamma=0 & (2)\\ \alpha-\beta+\gamma=2 & (3)\end{array}\right\}\ \text{δηλαδή:}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2)\\ (3)\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha-\beta+\gamma=2\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}2\alpha+2\gamma=2\Leftrightarrow\alpha+\gamma=1(4)$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\Bigg\}\Leftrightarrow\begin{matrix}9\alpha+3\beta+\gamma=1\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{matrix}\Bigg\}\underset{\cdot(-3)}{\Leftrightarrow}\begin{matrix}9\alpha+3\beta+\gamma=1\\ -3\alpha-3\beta-3\gamma=0\end{matrix}\Bigg\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}6\alpha-2\gamma=1(5)$$

Τέλος,

$$\begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}\Bigg\}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha+\gamma=1\\ 6\alpha-2\gamma=1\end{matrix}\Bigg\}\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}\begin{matrix}2\alpha+2\gamma=2\\ 6\alpha-2\gamma=1\end{matrix}\Bigg\}\overset{(+)}{\Leftrightarrow}\begin{matrix}8\alpha=3\\ \alpha+\gamma=1\end{matrix}\Bigg\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha=\frac{3}{8}\\ \gamma=\frac{5}{8}\end{pmatrix}$$

Τότε η (2) δίνει: $\alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\beta=-1$.

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το $P(x)=\frac{3}{8}x^2-x+\frac{5}{8}$.

Β. i. Για να ορίζεται η $f(x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει:

$$\begin{matrix}1+\sigma\upsilon\nu x\geq 0\\ 1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0\end{matrix}\Bigg\}\Leftrightarrow\begin{matrix}\sigma\upsilon\nu x\geq -1\\ \sigma\upsilon\nu x\leq 1\end{matrix}\Bigg\}\Leftrightarrow -1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$$ που ισχύει.

Επομένως, $A_f=\mathbb{R}$. Τότε είναι:

* Για κάθε $x\in A$, το $-x\in A$ και

* $f(-x)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(-x)}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(-x)}=$
$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}=f(x)$.

Άρα η f είναι άρτια.

ii. * Για κάθε $x\in A$, το $x+\pi\in A$ και το $x-\pi\in A$.

*

$f(x+\pi)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(x+\pi)}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(x+\pi)}=$
$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(\pi+x)}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(\pi+x)}=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}=$
$f(x)$

$f(x-\pi)=\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(x-\pi)}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(x-\pi)}=$
$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu[-(\pi-x)]}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu[-(\pi-x)]}=$
$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu(\pi-x)}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu(\pi-x)}=$
$\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}=f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο Τ=π.

iii.

$$f(x)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}+\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}=\sqrt{3}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$1+\sigma\upsilon\nu x=3-2\sqrt{3}\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}+1-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x-3=-2\sqrt{3-3\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$(2\sigma\upsilon\nu x-3)^2=\left(-2\sqrt{3-3\sigma\upsilon\nu x}\right)^2 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x-12\sigma\upsilon\nu x+9=12-12\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu^2 x=3 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα, είναι:

$$\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z} \quad ή$$

$$\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{5\pi}{6}, \kappa\in\mathbb{Z}.$$