ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **106**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα –Ιδιότητες Συναρτήσεων- Τριγωνομετρία - Πολυώνυμα **15-01-17**

<u>Θέμα 1ο:</u>

Α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται περιοδική με περίοδο Τ; **(7 μον.)**

Β. Ποια εξίσωση λέγεται γραμμική; **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το x-ρ ισούται με $P(\rho)$. **(7 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)=(4x-1)^{2017}+7$ ισούται με 6. **Σ Λ**

ii. Το πολυώνυμο $P(x)=x^4-2x^3+4x-3$ έχει παράγοντα το x+1. **Σ Λ**

iii. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{31\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Σ Λ**

iv. $\eta\mu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f(x)=2x^2-5x+9$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

<u>Θέμα 2ο:</u>

Α. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο

$$Q(x)=(\kappa+\lambda-3)x^3+(3\kappa\lambda+12)x+\kappa+1$$

να είναι μηδενικού βαθμού. **(6 μον.)**

Β. Δίνεται πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση:

$$(1-3x)P(x)=-3x^3+4x^2-4x+1$$

i. Να δείξετε ότι $P(x)=x^2-x+1$.

ii. Να δείξετε ότι $P(P(x))=x^4-2x^3+2x^2-x+1$.

(2x5=10 μον.)

Γ. i. Να κάνετε τη διαίρεση $\left(x^4-4x^3-x^2+16x-12\right):\left(x^2-5x+6\right)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(5μον.)**

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$. **(4μον.)**

Θέμα 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(\alpha+\beta-1)x^2+(\beta-\gamma-1)x+3-\gamma$ για την οποία ισχύει $f(0)=4$ και η γραφική της παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(-2,8)$.

Α. Να αποδείξετε ότι α=1, β=2 και γ=-1. **(6 μον.)**

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή

$$f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}.$$ **(5 μον.)**

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. **(4 μον.)**

Δ. Να βρείτε το ολικό ακρότατο της f. **(6 μον.)**

Ε. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f. **(4 μον.)**

Θέμα 4ο:

Δίνεται η $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega x\right)+1$, ρ<0 η οποία έχει ελάχιστη τιμή -1 και περίοδο Τ=3π.

Α. Να αποδείξετε ότι $\omega=\frac{2}{3}$ και ρ=-2. **(5 μον.)**

Β. Να γραφτεί ο τύπος της f σε απλούστερη μορφή και να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ στο διάστημα $[0,3\pi]$. **(5 μον.)**

Γ. Να βρεθούν τα ακρότατα της f και οι τιμές του x στις οποίες αντιστοιχούν. **(6 μον.)**

Δ. Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=3. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(4 μον.)**

Ε. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f κατά π μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω. **(5 μον.)**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ>0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

α. $x+T \in A$, $x-T \in A$ και

β. $f(x+T)=f(x-T)=f(x)$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται περίοδος της συνάρτησης f.

Β. Κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha x+\beta y=\gamma$ με $\alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$ λέγεται γραμμική.

Γ. Η ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το x-ρ γράφεται :

$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$.

Επειδή ο διαιρέτης x-ρ είναι πρώτου βαθμού , το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε :

$P(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)+\upsilon$ και αν θέσουμε x=ρ , παίρνουμε

$P(\rho)=(\rho-\rho)\cdot\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$.

Επομένως , $\upsilon=P(\rho)$.

Δ. **i.**Σ **ii.**Λ **iii.** Λ **iv.**Λ **v.**Σ

Θέμα 2ο:

Α. Για να είναι το πολυώνυμο $Q(x)=(\kappa+\lambda-3)x^3+(3\kappa\lambda+12)x+\kappa+1$ μηδενικού βαθμού πρέπει:

$$\left.\begin{aligned}\kappa+\lambda-3=0\\3\kappa\lambda+12=0\\\kappa+1\neq 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}\kappa+\lambda=3\\\kappa\lambda=-4\\\kappa+1\neq 0\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\kappa=-1\\\lambda=4\\\kappa\neq-1\end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix}\kappa=4\\\lambda=-1\\\kappa\neq-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\kappa=4\\\lambda=-1\end{pmatrix}.$$

Β. Έχουμε: $(1-3x)P(x)=-3x^3+4x^2-4x+1$.

i. Εφόσον το δεύτερο μέλος της ισότητας είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, τότε και το πρώτο μέλος της ισότητας πρέπει να είναι 3ου βαθμού. Επομένως το $P(x)$ θα είναι 2ου βαθμού δηλαδή θα έχει τη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$. Τότε:

$$(1-3x)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=-3x^3+4x^2-4x+1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma-3\alpha x^3-3\beta x^2-3\gamma x=-3x^3+4x^2-4x+1 \Leftrightarrow$$

$$-3\alpha x^3+(\alpha-3\beta)x^2+(\beta-3\gamma)x+\gamma=-3x^3+4x^2-4x+1 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} -3\alpha&=-3\\ \alpha-3\beta&=4\\ \beta-3\gamma&=-4\\ \gamma&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \alpha&=1\\ \beta&=-1\\ \gamma&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Οπότε $P(x)=x^2-x+1$.

ii. $P(P(x))=P(x^2-x+1)=(x^2-x+1)^2-(x^2-x+1)+1=$

$x^4+x^2+1-2x^3+2x^2-2x-x^2+x-1+1=x^4-2x^3+2x^2-x+1.$

Γ.i.

$$\begin{array}{l|l} x^4-4x^3-x^2+16x-12 & x^2-5x+6 \\ \hline -x^4+5x^3-6x^2 & x^2+x-2 \\ \quad x^3-7x^2+16x-12 & \\ \quad -x^3+5x^2-6x & \\ \hline \qquad -2x^2+10x-12 & \\ \qquad 2x^2-10x+12 & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης είναι:

$x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x^2-5x+6)(x^2+x-2)$.

ii. $x^4-4x^3-x^2+16x-12=0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow} (x^2-5x+6)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=0$ ή $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$ ή $x=-2$ ή $x=1$.

Θέμα 3^{ο}:

Α. Για τη συνάρτηση $f(x)=(\alpha+\beta-1)x^2+(\beta-\gamma-1)x+3-\gamma$ ισχύει $f(0)=4$ και η γραφική της παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(-2,8)$, οπότε έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=4 \\ f(1)=8 \\ f(-2)=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 3-\gamma=4 \\ \alpha+\beta-1+\beta-\gamma-1+3-\gamma=8 \\ (\alpha+\beta-1)\cdot 4+(\beta-\gamma-1)\cdot(-2)+3-\gamma=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma=-1 \\ \alpha+2\beta-2\gamma=7 \\ 4\alpha+4\beta-4-2\beta+2\gamma+2+3-\gamma=8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma=-1 \\ \alpha+2\beta=5 \\ 4\alpha+2\beta+\gamma=7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma=-1 \\ \alpha+2\beta=5 \\ -4\alpha-2\beta=-8 \end{array}\right\} \underset{(+)}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma=-1 \\ -3\alpha=-3 \\ \alpha+2\beta=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \gamma=-1 \\ \alpha=1 \\ \beta=2 \end{array}\right\}.$$

Β. Για α=1, β=2, γ=-1 η $f(x)=(\alpha+\beta-1)x^2+(\beta-\gamma-1)x+3-\gamma$ γίνεται

$$f(x)=(1+2-1)x^2+(2+1-1)x+3+1=2x^2+2x+4=$$

$$2\left(x^2+x\right)+4=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+4=2\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}+4=$$

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}.$$

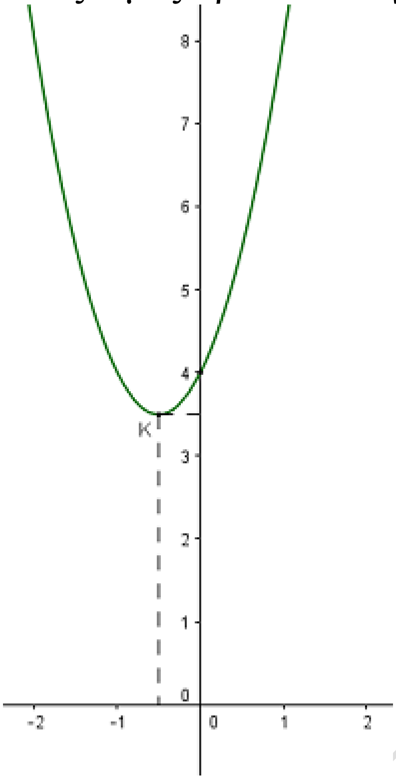
Γ. Η $f(x)=2x^2+2x+4$ είναι παραβολή με α=2>0, οπότε στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω. Η κορυφή της είναι το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Το τριώνυμο έχει $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=4-4\cdot 2\cdot 4=4-32=-28$, δηλαδή η κορυφή της είναι $K\left(-\frac{2}{4},-\frac{-28}{8}\right)$ άρα $K\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

Επομένως, η συνάρτηση είναι ↘ στο $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ και ↗ στο $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Δ. Από το Γ ερώτημα προκύπτει ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στην κορυφή της, δηλαδή για $x=-\frac{1}{2}$ το $y=\frac{7}{2}$.

Ε. Από τα παραπάνω ερωτήματα και χρησιμοποιώντας κάποιες ενδεικτικές τιμές προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.



<u>Θέμα 4°:</u>

Α. Η $f(x)=\rho\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\omega x\right)+1=\rho\eta\mu\omega x+1$, ρ<0 η έχει ελάχιστη τιμή -1 και περίοδο Τ=3π, οπότε $\rho+1=-1 \Leftrightarrow \rho=-2$ και $\frac{2\pi}{\omega}=3\pi \Leftrightarrow \omega=\frac{2}{3}$.

Β. Από το Α ερώτημα η f γράφεται: $f(x)=-2\eta\mu\frac{2x}{3}+1$.

Για να τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης τον άξονα $x'x$ πρέπει: $f(x)=0 \Leftrightarrow -2\eta\mu\frac{2x}{3}+1=0 \Leftrightarrow \eta\mu\frac{2x}{3}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{2x}{3}=\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\frac{2x}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=6\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=3\kappa\pi+\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z} .$$

ή

$$\frac{2x}{3}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x=6\kappa\pi+\frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow x=3\kappa\pi+\frac{5\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z} .$$

Όμως , $x\in[0,3\pi]$ οπότε:

Για κ=0 είναι $x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$, Για κ=1 είναι $x=3\pi+\frac{\pi}{4}$ απορ. ή $x=3\pi+\frac{5\pi}{4}$ απορ.

Τα ζητούμενα σημεία είναι: $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$.

Γ.

$$-1\le \eta\mu\frac{2x}{3}\le 1\overset{\cdot(-2)}{\Leftrightarrow} 2\ge -2\eta\mu\frac{2x}{3}\ge -2\Leftrightarrow -2\le -2\eta\mu\frac{2x}{3}\le 2\overset{(+1)}{\Leftrightarrow}-1\le f(x)\le 3.$$

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -1 και ολικό μέγιστο το 3.
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το -1 όταν

$$\eta\mu\frac{2x}{3}=1\Leftrightarrow \frac{2x}{3}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=6\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=3\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$$

$$\overset{x\in[0,3\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{3\pi}{4}.$$

Όμοια η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 3 όταν

$$\eta\mu\frac{2x}{3}=-1\Leftrightarrow \frac{2x}{3}=2\kappa\pi-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=6\kappa\pi-\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=3\kappa\pi-\frac{3\pi}{4}$$

$$\overset{x\in[0,3\pi]}{\Leftrightarrow} x=3\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$$

ή

$$\frac{2x}{3}=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=6\kappa\pi+\frac{9\pi}{2}\Leftrightarrow x=3\kappa\pi+\frac{9\pi}{4}$$

$$\overset{x\in[0,3\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{9\pi}{4}.$$

Δ. Δεν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f να βρίσκεται πάνω από την ευθεία y=3 διότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 3.

Ε. Ο τύπος της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f κατά π μονάδες προς τα δεξιά και 2 μονάδες προς τα κάτω είναι:

$$g(x)=f(x-\pi)-2=-2\eta\mu\frac{2(x-\pi)}{3}+1-2=-2\eta\mu\left(\frac{2x-2\pi}{3}\right)-1.$$