ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ **104**

Β' Λυκείου

Ον/μο:………………………. **Γεν. Παιδείας**

Ύλη: Συστήματα, Ιδιότητες Συναρτήσεων, Τριγωνομετρία **06-11-16**

Θέμα 1^o:

Α. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται άρτια; **(6 μον.)**

Β. Τι ονομάζουμε ακτίνιο; **(6 μον.)**

Γ. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$. **(8 μον.)**

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **(Σ) Σωστό** ή **(Λ) Λάθος** τις παρακάτω προτάσεις :

i. Αν για ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ισχύει ότι D=0, τότε το σύστημα είναι αδύνατο. **Σ Λ**

ii. Αν μία συνάρτηση f είναι άρτια , τότε δεν είναι γνησίως μονότονη. **Σ Λ**

iii. $\varepsilon\varphi\left(\dfrac{11\pi}{2}-x\right)=\sigma\varphi x$. **Σ Λ**

iv. Το σύστημα $\left.\begin{array}{l} x\cdot y=35 \\ x+y=12 \end{array}\right\}$ έχει μοναδική λύση. **Σ Λ**

v. Η συνάρτηση $f:[-2,7]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=8x^5$ είναι περιττή. **Σ Λ**

(5x1=5 μον.)

Θέμα 2^o:

Α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα : $\left.\begin{array}{l} x^3+8y^3=9 \\ x+2y=3 \end{array}\right\}$ έχει δύο λύσεις τις

$(x,y)=(1,1)$ και $(x,y)=\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$. **(12 μον.)**

Β. Αν για μια γωνία ω γνωρίζουμε ότι $\dfrac{\pi}{2}<\omega<\pi$ και το ημω ισούται με την τεταγμένη της δεύτερης λύσης του παραπάνω συστήματος, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

(13 μον.)

Θέμα 3ο:

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
ii. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
iii. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.
iv. Να εξετασθεί η συνάρτηση ως προς τις συμμετρίες.

(4x3=12 μον.)

Β. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παρασταθούν γραφικά οι συναρτήσεις :

$\varphi(x)=x^2$, $f(x)=(x-2)^2$ και $g(x)=(x-2)^2+1$

(6 μον.)

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=-3x^2+4$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης φ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της h:

i. Κατά 2 μονάδες αριστερά και κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.
ii. Κατά 3 μονάδες δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.

(2x3,5=7 μον.)

Θέμα 4ο:

Α. Αν $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i. $\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **ii.** $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x$ **(8 μον.)**

Β. Αν $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}=-2\varepsilon\varphi x .$$ **(7 μον.)**

Γ. Να υπολογισθούν οι τιμές των παραστάσεων:

i. $$A=\frac{\sigma\upsilon\nu120^\circ\cdot\eta\mu225^\circ\cdot\sigma\varphi135^\circ}{\sigma\upsilon\nu135^\circ\cdot\varepsilon\varphi300^\circ\cdot\eta\mu150^\circ} .$$ **(5 μον.)**

ii. $$B=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\varepsilon\varphi(2\pi-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)} .$$ **(5 μον.)**

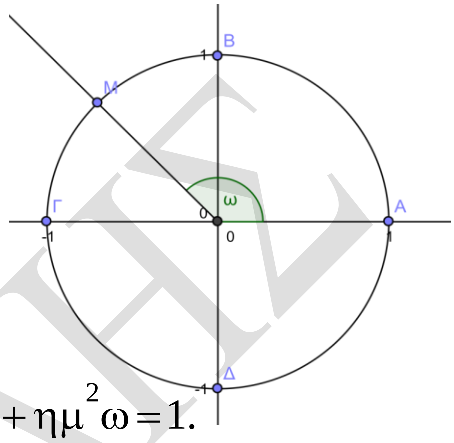
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ (Ενδεικτικές)

Θέμα 1ο:

Α. Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέγεται άρτια, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει: $-x \in A$ και $f(-x) = f(x)$.

Β. Ακτίνιο ονομάζουμε ένα τόξο του κύκλου που έχει μήκος όσο μία ακτίνα του κύκλου.



Γ. Αν Μ(x,y) είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο , τότε θα είναι : $x = συνω$ και $y = ημω$

Επειδή όμως , (ΟΜ)=1 και

$(OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$

θα ισχύει : $x^2 + y^2 = 1$ οπότε θα έχουμε $συν^2ω + ημ^2ω = 1$.

Δ. **i.** Λ **ii.** Σ **iii.** Σ **iv.** Λ **v.** Λ

Θέμα 2ο:

Α.

$$\left.\begin{aligned} x^3 + 8y^3 &= 9 \\ x + 2y &= 3 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} (3-2y)^3 + 8y^3 &= 9 \\ x &= 3-2y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 27 - 54y + 36y^2 - 8y^3 + 8y^3 &= 9 \\ x &= 3-2y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 36y^2 - 54y + 18 &= 0 \\ x &= 3-2y \end{aligned}\right\} \overset{:18}{\Leftrightarrow} \left.\begin{aligned} 2y^2 - 3y + 1 &= 0 \\ x &= 3-2y \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y = 1 \\ x = 1 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} y = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{pmatrix}.$$

Όπου για την εξίσωση $2y^2 - 3y + 1 = 0$ έχουμε: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 8 = 1 > 0$ άρα έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες τις:

$$y_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\langle \begin{aligned} y_1 &= \frac{4}{4} = 1 \\ y_2 &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right. .$$

Β. Η τεταγμένη της δεύτερης λύσης του (Σ) του α ερωτήματος είναι $\frac{1}{2}$.

Οπότε γνωριζουμε ότι **ημω=$\frac{1}{2}$** και $\frac{\pi}{2}<\omega<\pi$. Τότε:

$$\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^2+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\overset{\frac{\pi}{2}<\omega<\pi}{\Leftrightarrow}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Επίσης: $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon\varphi\omega=-\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

Τέλος, $\varepsilon\varphi\omega\cdot\sigma\varphi\omega=1\Leftrightarrow\boldsymbol{\sigma\varphi\omega=-\sqrt{3}}$.

<u>Θέμα 3^o:</u>

Α. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{16-x^2}$.

i. Για να ορίζεται η f πρέπει:

$$\underbrace{16-x^2\geq 0}_{x=4\text{ ή }x=-4}\overset{\text{ετερ.του α}}{\Leftrightarrow}-4\leq x\leq 4.\text{ Οπότε: }A=[-4,4]\ .$$

ii. $\rightarrow$Έστω $x_1,x_2\in[-4,0]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$$\mathbf{x_1<x_2}\Leftrightarrow x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2<-x_2^2\Leftrightarrow 16-x_1^2<16-x_2^2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{16-x_1^2}<\sqrt{16-x_2^2}\Leftrightarrow\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}.$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα.

$\rightarrow$Έστω $x_1,x_2\in[0,4]$ με $x_1<x_2$. Τότε:

$$\mathbf{x_1<x_2}\Leftrightarrow x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow -x_1^2>-x_2^2\Leftrightarrow 16-x_1^2>16-x_2^2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{16-x_1^2}>\sqrt{16-x_2^2}\Leftrightarrow\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}.$$

Δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα.

iii. Είναι: $x^2\geq 0\Leftrightarrow -x^2\leq 0\Leftrightarrow 16-x^2\leq 16\Leftrightarrow f(x)\leq 16$.

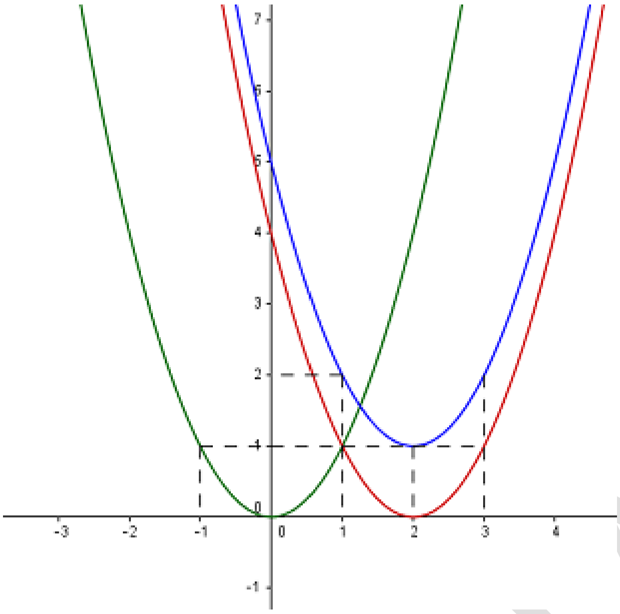
Επομένως, η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το 16 για x=0.
Επίσης, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\pm 4$ το y=0.

iv. Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=[-4,4]$. Οπότε

$\forall x\in A$ το $-x\in A$. Επίσης,

$\mathbf{f(-x)}=\sqrt{16-(-x)^2}=\sqrt{16-x^2}=\mathbf{f(x)}$. Άρα η f είναι άρτια.

Β. Η f είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες δεξιά και η g είναι μετατόπιση της φ κατά 2 μονάδες δεξιά και 1 μονάδα πάνω.



Γ. i. $\varphi(x)=h(x+2)-1=-3(x+2)^2+4-1=-3\left(x^2+4x+4\right)+3=$

$=-3x^2-12x-9.$

ii. $\varphi(x)=h(x-3)+2=-3(x-3)^2+4+2=-3\left(x^2-6x+9\right)+6=$

$=-3x^2+18x-21.$

Θέμα 4^o:

Α. i. Έχουμε:

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2x++2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\underbrace{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}_{1}+2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow \boldsymbol{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x=-\frac{3}{8}}.$$

ii. Είναι:

$$\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=\frac{\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x}{\sigma\upsilon\nu x\eta\mu x}=\frac{1}{-\frac{3}{8}}\Rightarrow$$

εφx+σφx=-$\mathbf{\frac{8}{3}}$.

Β.

$$\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}}-\sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}}=\frac{\sqrt{1-\eta\mu x}}{\sqrt{1+\eta\mu x}}-\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}}{\sqrt{1-\eta\mu x}}=\frac{\left(\sqrt{1-\eta\mu x}\right)^2-\left(\sqrt{1+\eta\mu x}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\eta\mu x}\right)\left(\sqrt{1-\eta\mu x}\right)}=$$

$$\frac{1-\eta\mu x-1-\eta\mu x}{\sqrt{1-\eta\mu^2x}}=\frac{-2\eta\mu x}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2x}}=\frac{-2\eta\mu x}{|\sigma\upsilon\nu x|}\underset{-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}}{=}\frac{-2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\mathbf{-\varepsilon\varphi x}.$$

Γ. i.

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu120^\circ\cdot\eta\mu225^\circ\cdot\sigma\varphi135^\circ}{\sigma\upsilon\nu135^\circ\cdot\varepsilon\varphi300^\circ\cdot\eta\mu150^\circ}$$

$$A=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-60^\circ\right)\cdot\eta\mu\left(270^\circ-45^\circ\right)\cdot\sigma\varphi\left(180^\circ-45^\circ\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-45^\circ\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(360^\circ-60^\circ\right)\cdot\eta\mu\left(180^\circ-30^\circ\right)}$$

$$A=\frac{-\sigma\upsilon\nu60^\circ\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu45^\circ\right)\cdot\left(-\sigma\varphi45^\circ\right)}{-\sigma\upsilon\nu45^\circ\cdot\left(-\varepsilon\varphi60^\circ\right)\cdot\eta\mu30^\circ}=\frac{-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(-1)}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\frac{1}{2}}$$

$$A=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

ii.

$$B=\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(2\pi-\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\alpha\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)}$$

$$B=\frac{-\eta\mu\alpha\cdot\left(-\sigma\upsilon\nu\alpha\right)\cdot\left(-\varepsilon\varphi\alpha\right)}{-\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\left(-\varepsilon\varphi\alpha\right)\cdot\left(-\eta\mu\alpha\right)}=\mathbf{1}.$$